CARMEN GÓMEZ LAVEAGA

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS

(CARDINALES Y ORDINALES)

FACULTAD DE CIENCIAS, UNAM
2011

Gómez Laveaga, Carmen
Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos : cardinales y ordinales / Carmen Gómez Laveaga. – 2a reimp. – México : UNAM, Facultad de Ciencias, 2011.
x, 129 p. ; 22 cm. – (Temas de matemáticas) (Las prensas de ciencias)
Bibliografía: p. 125-126
Incluye índice
ISBN 978-970-32-4705-9

1. Teoría de los conjuntos. 2. Números cardinales. 3. Números ordinales. I. Universidad Nacional Autónoma de México. Facultad de Ciencias. II. t. III. Ser. IV. Ser.

511.322-scdd21 Biblioteca Nacional de México

Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos (cardinales y ordinales)
1ª edición, 2007
1ª reimpresión, 15 de noviembre 2011

© D.R. 2011. Universidad Nacional Autónoma de México.
Facultad de Ciencias.
Ciudad Universitaria. Delegación Coyoacán,
C. P. 04510, México, Distrito Federal.
editoriales@ciencias.unam.mx

ISBN: 978-970-32-4705-9

Diseño de portada: Laura Uribe

Prohibida la reproducción parcial o total de la obra por cualquier medio, sin la autorización por escrito del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

A mis queridas Aurora y Sabina

Índice

Introducción VII

Capítulo 1. Nociones básicas 1
§ 1.1 Conjuntos 1
§ 1.2 Relaciones 7
§ 1.3 Funciones 9
§ 1.4 Relaciones de equivalencia 13
§ 1.5 Relaciones de orden 16
§ 1.6 Ejercicios 21

Capítulo 2. El Axioma de Elección y sus equivalencias 29
§ 2.1 Introducción 29
§ 2.2 Equivalencias del Axioma de Elección 30
§ 2.3 Ejercicios 36

Capítulo 3. Números cardinales 37
§ 3.1 Cardinales 37
§ 3.2 Operaciones entre cardinales 44
§ 3.3 Conjuntos finitos 50
§ 3.4 Conjuntos numerables y conjuntos infinitos . . 58
§ 3.5 Sistemas de Peano 66
§ 3.6 Ejercicios 80

Capítulo 4. Números ordinales 85
§ 4.1 Conjuntos bien ordenados 85
§ 4.2 Suma y producto de números ordinales . . . 99
§ 4.3 Representantes para números ordinales según von Neumann 114
§ 4.5 Ejercicios 123

Bibliografía 125

Índice alfabético 127

Introducción

Este libro es una introducción a la teoría de conjuntos haciendo énfasis en la teoría de cardinales y ordinales. Los conceptos básicos de la teoría de conjuntos se manejan intuitivamente, omitiendo la lógica formal y la axiomática de la teoría de conjuntos.

El único axioma que se presenta es el Axioma de Elección junto con algunas de sus equivalencias siendo una de estas el Lema de Zorn. Este último se usa repetidamente en muchas demostraciones, de tal manera que el estudiante al terminar de leer el libro habrá adquirido un buen manejo de tan importante resultado. Los motivos por los cuales se presentan los cardinales antes de los ordinales son principalmente dos. El primero es que el desarrollo que se hace es bastante intuitivo (más que la Teoría de von Neumann) y de alguna manera se presentan los conceptos de cardinal y ordinal como independientes, algo que no sucede en el desarrollo de la Teoría de números ordinales y cardinales que hace von Nuemann, ya que en ésta los cardinales son ciertos números ordinales. El segundo motivo, y que a mi juicio lo hace muy atractivo, es la gran cantidad de bellos resultados que aparecen en esta presentación y que de otra manera no sucedería. Véase, por mencionar un ejemplo, la presentación de Sistemas de Peano para concluir con la definición de los números naturales.

Si bien es cierto que las definiciones de número cardinal y número ordinal presentan un problema en el sentido de que no se dice exactamente qué objetos de la Teoría de Conjuntos son, en realidad lo que se usa es el hecho de cuándo dos conjuntos (conjuntos bien ordenados) tienen el mismo cardinal (ordinal) y en ningún momento se necesita saber qué conjunto es el número ordinal. A partir de esto podemos desarrollar la teoría sin ningún problema.

En la Sección 4.4 del Capítulo 4 se presenta la manera en que von Neumann introdujo los representantes para números ordinales y de aquí para los números cardinales, y se hace una muy breve introducción para que el lector tenga una idea de cómo se introducen los ordinales y los cardinales

según von Neumann, que es la manera en que, por lo general, actualmente se maneja.

Podría mencionar un tercer motivo que es el siguiente: para un estudiante de matemáticas es importante, dentro de su cultura general, tener algún conocimiento sobre números cardinales y ordinales, y creo que este libro los introduce rápidamente en el tema cubriendo una parte del desarrollo de ellos.

En el Capítulo 1 se introducen los conceptos básicos que se requieren para el estudio de los temas posteriores. La mayoría de los teoremas ahí presentados no se demuestran.

El Capítulo 2 está dedicado al Axioma de Elección, uno de los axiomas de la Teoría de Conjuntos. Ahí se presentan varias equivalencias, entre las cuales, como ya hemos dicho, se encuentra el Lema de Zorn.

Los Capítulos 3 y 4 corresponden a la teoría de cardinales y ordinales respectivamente.

Cabe mencionar que los números naturales (Sistemas de Peano) se presentan al final del Capítulo 3 y se puede observar que antes de este tema, no hemos hecho uso de ellos en ningún momento, por lo que los ejercicios propuestos hasta antes de la introducción de los números naturales no los involucran en ningún momento.

El lector interesado en un estudio axiomático de la Teoría de Conjuntos puede referirse a [**Ad**], [**Am**], [**En**], [**He**], [**Hr**],[**Th**] [**Fr 1**], [**Fr 2**], [**Ha**], [**Ku**] y [**Zu**].

Agradezco a los estudiantes Ernesto Mayorga Saucedo y Rolando Gómez Macedo por el excelente trabajo que con paciencia realizaron al escribir este libro en LaTeX.

Por último quiero manifestar también mi agradecimiento a los árbitros que revisaron con todo cuidado este libro y que gracias a sus sugerencias se ha mejorado.

Capítulo 1

Nociones básicas

§ 1.1 Conjuntos

Intuitivamente un conjunto es una colección de objetos. A estos objetos los llamaremos elementos del conjunto. El símbolo $\in$ denota la **pertenencia**, es decir, si A es un conjunto y x es un elemento de A, lo denotaremos por

$$x \in A.$$

Lo anterior también se puede leer: *x es elemento de A ó x está en A*. De este modo, un conjunto está determinado por sus elementos. Así, dos conjuntos A y B serán iguales si y sólo si tienen los mismos elementos, es decir, es verdadera

$$A = B \iff \forall x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \, .$$

Para decir que un objeto x **no pertenece a** un conjunto A utilizaremos la notación

$$x \notin A.$$

Los conjuntos A y B serán distintos, y lo denotamos $A \neq B$, si existe al menos un objeto x que hace verdadera la siguiente proposición

$$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A).$$

Para describir un conjunto A generalmente se utiliza una propiedad $p\,(x)$ que solamente satisfacen los elementos de este conjunto, es decir, si los elementos del conjunto A son los únicos que hacen verdadera la proposición $p\,(x)$, entonces

$$A = \{x \mid p\,(x) \text{ es verdadera}\}.$$

Ejemplo 1.1.1.
(a) $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$ es el **conjunto vacío** y no tiene elementos ya que la proposición $p(x) : x \neq x$ es falsa para cualquier x.
(b) $\{a\} = \{x \mid x = a\}$ es el **unitario** de a; conjunto con un único elemento y este elemento se puede describir mediante la proposición $p(x) : x = a$.

(*c*) $\{a, b\} = \{x \mid x = a \text{ o } x = b\}$ es el conjunto cuyos únicos elementos son a y b y la proposición que determina estos elementos es $p(x) : x = a$ o $x = b$. A este conjunto se le llama el **par no ordenado** de a y b.
(*d*) En forma análoga se pueden definir tríos, cuartetos, quintetos no ordenados $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c, d\}$, $\{a, b, c, d, e\}$,... etc.

El orden en que escribamos los elementos de un conjunto no lo altera, pues lo que determina a un conjunto son sus elementos sin importar el orden en que éstos se den. Así, tenemos las siguientes igualdades

$$\{a, b\} = \{b, a\}\,; \;\; \{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{c, b, a\} = ...etc.$$

Definición 1.1.1. *Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es un* ***subconjunto*** *de B, y lo denotaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es también elemento de B. Esto es*

$$A \subseteq B \underset{def}{\iff} \forall\, x \;\; (x \in A \Rightarrow x \in B)\,.$$

Si A es un subconjunto de B y $A \neq B$ diremos que A es **subconjunto propio** de B, lo que indicaremos por $\mathbf{A \subset B}$ o por $\mathbf{A \subsetneq B}$.

***Teorema* 1.1.1.** *Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si cada uno de ellos es subconjunto del otro, es decir*

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

***Teorema* 1.1.2.** *Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Entonces*
(1) $\varnothing \subseteq A$.
(2) $A \subseteq A$.
(3) *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$.*

Definición 1.1.2. *Sean A y B conjuntos arbitrarios. La* ***unión*** *de A y B, denotado por $A \cup B$, es el conjunto*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}\,.$$

***Proposición* 1.1.3.** *Sean A, B, C conjuntos. Entonces*
(1) $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$.
(2) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.
(3) $A \cup B = B \cup A$.
(4) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
(5) $A \subseteq B$ *si y sólo si* $A \cup B = B$.

Definición 1.1.3. *Sean A y B conjuntos, la* ***intersección*** *de A y B, denotada $A \cap B$, es el conjunto*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}\,.$$

***Proposición* 1.1.4.** *Sean A, B, C conjuntos. Entonces*
(1) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$.
(2) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.
(3) $A \cap B = B \cap A$.
(4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
(5) $A \subseteq B$ *si y sólo si* $A \cap B = A$.

La unión y la intersección son operaciones sobre conjuntos que tienen la propiedad de que cada una de ellas es distributiva respecto a la otra, es decir,

***Proposición* 1.1.5.** *Si A, B y C son conjuntos. Entonces*
(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Nota 1. Existen varias formas de expresar la idea de conjunto como los son, familia de objetos, colección de elementos, etc. y nosotros usaremos con libertad este lenguaje.

Así también cuando queremos hacer hincapié al referirnos a la naturaleza de los elementos de un conjunto, usaremos frases como "un conjunto cuyos elementos son conjuntos" o "familia de conjuntos", ya que en estos casos lo que queremos hacer es trabajar con estos conjuntos que son elementos de un conjunto dado.

Definición 1.1.4.
(*i*) *Diremos que dos conjuntos A y B son* ***ajenos*** *si $A \cap B = \varnothing$.*
(*ii*) *Sea $\mathfrak{F}$ un conjunto cuyos elementos son conjuntos. Diremos que los conjuntos de $\mathfrak{F}$ son* ***ajenos dos a dos****, si cualesquiera dos conjuntos que pertenecen a $\mathfrak{F}$ son ajenos.*

Definición 1.1.5. *Dados dos conjuntos A y B su* ***diferencia*** *es el conjunto*

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$

La diferencia de conjuntos, vista como una operación en los conjuntos, en general no es ni asociativa ni conmutativa y tampoco distribuye ni a la unión ni a la intersección. Sin embargo sí se tiene que

***Proposición* 1.1.6.** *(Leyes de Morgan) Si A y B son conjuntos, entonces*
(1) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
(2) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

Los conceptos de unión e intersección de dos conjuntos pueden generalizarse a familias arbitrarias de conjuntos de la siguiente manera.

Definición 1.1.6. *Sea $\mathfrak{F}$ una familia de conjuntos. La unión de todos los conjuntos A que pertenecen a $\mathfrak{F}$ es el conjunto*

$$\bigcup_{A\in\mathfrak{F}} A = \{x \mid \textit{Existe } A \in \mathfrak{F} \textit{ tal que } x \in A\}.$$

Definición 1.1.7. *Sea $\mathfrak{F}$ una familia no vacía de conjuntos. La intersección de todos los conjuntos A que pertenecen a $\mathfrak{F}$, es el conjunto*

$$\bigcap_{A\in\mathfrak{F}} A = \{x \mid \textit{para toda } A \in \mathfrak{F} \textit{ se tiene que } x \in A\}.$$

Observación 1.1. Para la unión no es necesario pedir que la familia $\mathfrak{F}$ de conjuntos sea no vacía ya que en este caso se tiene naturalmente que $\bigcup_{A\in\varnothing} A = \varnothing$. Sin embargo en el caso de la intersección es indispensable que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$, ya que

$$x \in \bigcap_{A\in\mathfrak{F}} A \iff x \in A \ \forall A \in \mathfrak{F},$$

y en el caso en que $\mathfrak{F} = \varnothing$ se cumpliría trivialmente que, para todo conjunto A y para toda $x \in A$

$$x \in \bigcap_{A\in\varnothing} A,$$

debido a que no existe ningún conjunto A que pertenezca a $\varnothing$. Dicho de otra manera, para demostrar que

$$x \notin \bigcap_{A\in\varnothing} A,$$

deberíamos exhibir un conjunto $A \in \varnothing$ tal que $x \notin A$, lo que evidentemente no se puede hacer, y por lo tanto $\bigcap_{A\in\mathfrak{F}} A$ sería igual a un "conjunto universal" en el sentido de que cualquier conjunto sería elemento de él; pero como veremos después de la Nota 2, no existe tal conjunto.

Nota 2. *Aceptaremos como un hecho* que dado un conjunto A y una proposición $p(x)$, la colección de elementos de A que hacen verdadera a $p(x)$ es un conjunto (axioma de separación), es decir, a partir de A y la proposición $p(x)$, $\{x \in A \mid p(x) \text{ es verdadera}\}$ es un conjunto.

Por otra parte es importante mencionar que debemos tener cuidado cuando construimos la colección de objetos que hacen verdadera una proposición, es decir, colecciones del tipo $\{x \mid p(x) \text{ es verdadera}\}$ deben ser consideradas con cuidado, ya que pueden llevar a colecciones "muy grandes" de objetos que no necesariamente son conjuntos. Este tipo de colecciones son llamadas ***clases propias*** y se puede trabajar con ellas correctamente. Es más, en el álgebra, que es una parte muy importante de la

Matemática, por poner un ejemplo, se trabaja con estas clases y son de gran importancia. Existe una axiomática que respalda el trabajo con estas clases que incluye tanto clases como conjuntos y además cualquier teorema acerca de conjuntos que pueda ser probado con la axiomática de clases, puede ser probado con la axiomática de Zermelo-Fraenkel (incluyendo el axioma de elección) e inversamente. Desde este punto de vista es mucho más enriquecedor para la matemática trabajar con esta axiomática que con la clásica (Zermelo-Fraenkel) y así teorías que tienen gran relevancia en la matemática moderna, como, por ejemplo, la de categorías (de estructuras algebraicas, espacios topológicos, etc.), se pueden estudiar sin ningún problema.

Lo importante aquí es poder decidir si una colección de objetos es un conjunto o no. Un buen ejemplo de clase propia es la colección de todos los conjuntos. Si aceptáramos que esta clase es un conjunto esto nos llevaría a un conjunto universal $\mathscr{U}$, lo que produce contradicciones en la Teoría de Conjuntos.

***Teorema* 1.1.7.** *$\mathscr{U} = \{x \mid x$ es conjunto$\}$ no es un conjunto.*

Demostración. Supongamos que $\mathscr{U}$ es un conjunto y sea

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathscr{U} \mid x \notin x\}.$$

$\mathcal{C}$ es un conjunto debido a lo dicho en el primer párrafo de la Nota 2, y por lo tanto $\mathcal{C} \in \mathscr{U}$.

Una de las siguientes afirmaciones debe ser verdadera y sólo una

$$\mathcal{C} \in \mathcal{C} \text{ o } \mathcal{C} \notin \mathcal{C}.$$

Sin embargo ninguna de las dos lo es.

$1^o/$ Si $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, por definición de $\mathcal{C}$, se debe tener que $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ y por lo tanto tendríamos que $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$ lo que es una contradicción.

$2^o/$ Si $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, como $\mathcal{C} \in \mathscr{U}$, entonces $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$. Por lo tanto se tiene que $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$, que es una contradicción.

Concluimos entonces que $\mathscr{U}$ no es un conjunto. ■

El siguiente resultado, como puede verse, es un teorema equivalente al Teorema 1.1.7.

***Teorema* 1.1.8.** *Dado un conjunto A, existe un conjunto B tal que B no pertenece a A.*

Definición 1.1.8. *Dado un conjunto A, el* ***conjunto potencia*** *de A, denotado por $\mathscr{P}(A)$ es el conjunto*

$$\mathscr{P}(A) = \{C \mid C \subseteq A\}.$$

Definición 1.1.9. *El* ***par ordenado*** *de a, b, denotado por (a, b), es el conjunto*

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

***Teorema* 1.1.9.** *$(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*

Demostración. Supongamos que $(a, b) = (c, d)$, es decir

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}.$$

Caso 1: $a = b$. En este caso $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, lo que significa, por hipótesis, $\{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{a\}\}$ y entonces $a = b = c = d$.
Caso 2: $a \neq b$. Como $\{a, b\}$ es un elemento de $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ se debe tener que $\{a, b\} = \{c\}$ o $\{a, b\} = \{c, d\}$. El primer caso no puede suceder ya que esto implicaría que $a = b$, que no es el caso. Entonces se debe tener que $\{a, b\} = \{c, d\}$ y por lo tanto $c \neq d$. Por otro lado, como $\{a\} \in \{\{c\}, \{c, d\}\}$ y $c \neq d$ entonces $\{a\} = \{c\}$, así $a = c$. Ahora, ya que $\{a, b\} = \{c, d\}$, $a \neq b$ y $a = c$, entonces $b = d$.
El inverso es obvio. ■

El concepto de par ordenado podría definirse de varias maneras (ver Ejercicio 1.11) ya que el objetivo es que satisfaga el Teorema 1.1.9.

Definición 1.1.10. *El* ***producto cartesiano*** *de los conjuntos A y B es el conjunto*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

***Proposición* 1.1.10.** *Sean A, B y C conjuntos. Entonces*
(1) *Si A' y B' son conjuntos tales que $A \times B = A' \times B'$, entonces $A = A'$ y $B = B'$.*
(2) *$A \times \varnothing = \varnothing$.*
(3) *Si $A \neq \varnothing$ y $B \neq \varnothing$, entonces $A \times B \neq \varnothing$.*
(4) *$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$; $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.*
(5) *$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$; $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.*

En el Capítulo 2 definiremos, en general, el producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos.

§1.2 Relaciones

Definición 1.2.1.
(*i*) *Una* ***relación*** *de un conjunto X a un conjunto Y es una pareja ordenada $\mathscr{R} = (R, X \times Y)$, donde $R \subseteq X \times Y$.*
(*ii*) *El* ***dominio*** *de la relación $\mathscr{R}$, denotado por $Dom(\mathscr{R})$, es el conjunto*

$$Dom(\mathscr{R}) = \{x \in X \mid \text{existe } y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in R\}.$$

(*iii*) *La* ***imagen*** *de la relación $\mathscr{R}$, denotado por $Im(\mathscr{R})$ o $Ran(\mathscr{R})$, es el conjunto*

$$Im(\mathscr{R}) = Ran(\mathscr{R}) = \{y \in Y \mid \text{existe } x \in X \text{ tal que } (x, y) \in R\}.$$

Nota 3. Usualmente, abusando del lenguaje, al referirnos a una relación $\mathscr{R} = (R, X \times Y)$ usaremos únicamente al subconjunto R de $X \times Y$, en lugar de la pareja ordenada $\mathscr{R} = (R, X \times Y)$ y dejando en claro que es una relación de X a Y. Esto es, en vez de usar la pareja ordenada $\mathscr{R} = (R, X \times Y)$, diremos simplemente que R es una relación de X a Y y en este caso, el dominio $Dom(\mathscr{R})$ y la imagen $Im(\mathscr{R})$ de la relación, se denotarán $Dom(R)$ y $Im(R)$ respectivamente.

De acuerdo a la definición de relación y usando la nueva notación, queda claro que

***Teorema* 1.2.1.** *Las relaciones R de X a Y y R' de X' a Y' son iguales si y sólo si $X = X'$, $Y = Y'$ y $R = R'$.*

En el caso de que R sea una relación de X a X, simplemente diremos que R es una relación en X.

Definición 1.2.2. *Sea R una relación de X a Y. La* ***relación inversa*** *R^{-1} de R es la relación de Y a X, dada por*

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in R\}.$$

El dominio y la imagen de la inversa de una relación son la imagen y el dominio de la relación respectivamente.

Ejemplo 1.2.1.
(*a*) Para cualesquiera conjunto X y Y, $\varnothing$ es una relación de X a Y y se llama la relación vacía.
(*b*) Sea X cualquier conjunto y sea Δ_X la siguiente relación de X a X

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$$

Entonces $Dom(\Delta_X) = X$, $Im(\Delta_X) = X$ y $(\Delta_X)^{-1} = \Delta_X$.

(c) Sean X cualquier conjunto y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto potencia de X. Sea R la relación de X a $\mathscr{P}(X)$ definida por $R = \{(x, y) \mid x \in y\}$. Entonces

$$Dom\,(R) = X,\ Im\,(R) = \{y \in \mathscr{P}\,(X) \mid y \neq \emptyset\}\,,$$
$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} = \{(y, x) \mid x \in y\}\,.$$

Definición 1.2.3. *Sean R_1 y R_2 relaciones de A a B y de B a C respectivamente. La* ***composición*** *de R_1 con R_2, denotada por $R_2 \circ R_1$, es la relación de A a C definida por*

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \mid \textit{existe } y \in B \textit{ tal que } (x, y) \in R_1 \textit{ y } (y, z) \in R_2\}.$$

Ejemplo 1.2.2. Sea X un conjunto, R_1 la relación de X a $\mathscr{P}\,(X)$ definida por

$$(x, A) \in R_1 \subseteq X \times \mathscr{P}\,(X) \text{ si y sólo si } x \in A,$$

y sea R_2 la relación de $\mathscr{P}\,(X)$ a $\mathscr{P}\,(\mathscr{P}\,(X))$ definida por

$$(A, B) \in R_2 \subseteq \mathscr{P}\,(X) \times \mathscr{P}\,(\mathscr{P}\,(X)) \text{ si y sólo si } B = \{A\}\,.$$

La composición $R_2 \circ R_1$ es la relación de X a $\mathscr{P}\,(\mathscr{P}\,(X))$ que está dada por $(x, B) \in R_2 \circ R_1 \subseteq X \times \mathscr{P}\,(\mathscr{P}\,(X))$ si y sólo si existe $A \in \mathscr{P}\,(X)$ tal que $x \in A$ y $B = \{A\}$.

***Teorema* 1.2.2.** *Sea R_1 una relación de X a Y, R_2 una relación de Y a Z y R_3 una relación de Z a W. Entonces*
(1) $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$.
(2) $(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
(3) $R_1 \circ \Delta_X = R_1$ *y* $\Delta_Y \circ R_1 = R_1$.

Demostración.

(1) Por definición $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ y $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ son ambos subconjuntos de $X \times W$ ($R_2 \circ R_1 \subseteq X \times Z$ y $R_3 \circ R_2 \subseteq Y \times W$). Sólo falta demostrar que $R_3 \circ (R_2 \circ R_1) = (R_3 \circ R_2) \circ R_1$. Consideremos $(x, w) \in R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$, entonces existe $z \in Z$ tal que $(x, z) \in R_2 \circ R_1$ y $(z, w) \in R_3$. Ahora como $(x, z) \in R_2 \circ R_1$, existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R_1$ y $(y, z) \in R_2$. Si $(y, z) \in R_2$ y $(z, w) \in R_3$, entonces $(y, w) \in R_3 \circ R_2$ y ya que $(x, y) \in R_1$, se tiene que $(x, w) \in (R_3 \circ R_2) \circ R_1$ y por lo tanto

$$R_3 \circ (R_2 \circ R_1) \subseteq (R_3 \circ R_2) \circ R_1.$$

La otra inclusión se demuestra de manera análoga.

(2) Como $R_1^{-1} \subseteq Y \times X$, $R_2^{-1} \subseteq Z \times Y$ y $R_2 \circ R_1 \subseteq X \times Z$, entonces $R_1^{-1} \circ R_2^{-1} \subseteq Z \times X$ y $(R_2 \circ R_1)^{-1} \subseteq Z \times X$.
Sea $(z, x) \in (R_2 \circ R_1)^{-1}$. Entonces $(x, z) \in R_2 \circ R_1$ y por lo tanto existe $y \in Y$ tal que $(x, y) \in R_1$ y $(y, z) \in R_2$. De aquí se tiene que $(y, x) \in R_1^{-1}$ y $(z, y) \in R_2^{-1}$ y así $(z, x) \in R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$. Por lo tanto $(R_2 \circ R_1)^{-1} \subseteq R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
La otra inclusión se demuestra de manera análoga.

(3) Se deja como ejercicio al lector. ■

Definición 1.2.4. *Sea R una relación de X a Y, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. La **imagen** de A bajo la relación R y la **imagen inversa** de B bajo la relación R son, respectivamente, los conjuntos*

$$R[A] = \{y \in Y \mid \text{existe } x \in A \ y(x, y) \in R\},$$
$$R^{-1}[B] = \{x \in X \mid \text{existe } y \in B \ y(x, y) \in R\}.$$

Ejemplo 1.2.3. Sea $X = \{a, b, c, d\}$ y $Y = \{x, y, z\}$. Consideramos la relación de X a Y, $R = \{(a, x), (c, x), (c, y), (d, y)\}$.

Si $A = \{a, b\}$, $A' = \{b\}$, $B = \{x, y\}$, $B' = \{z\}$, entonces $f[A] = \{x\}$, $f[A'] = \varnothing$, $f^{-1}[B] = \{a, c, d\}$ y $f^{-1}[B'] = \varnothing$.

§ 1.3 Funciones

En esta sección estudiaremos ciertas relaciones entre conjuntos, llamadas funciones. Ellas son de gran importancia ya que nos permiten, de alguna manera comparar dos conjuntos, y en muchas ocasiones podemos obtener información de un conjunto a través de otro dado.

Definición 1.3.1. *Sean X y Y conjuntos y f una relación de X a Y. f se llama **función** de X a Y si*
(1) *$Dom(f) = X$,*
(2) *Si $(x, y), (x, y') \in f$ entonces debe ser $y = y'$.*

Definición 1.3.2. *Si f es una función de X a Y, el **dominio de la función** es el dominio de la relación (ver página 7, Definición 1.2.1). La **imagen** o **rango de la función** es la imagen o rango de la relación (ver página 7, Definición. 1.2.1). Al conjunto Y se le llama el **codominio** o **contradominio** de la función.*

Ejemplo 1.3.1.
(*a*) Sean $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{X, \varnothing\}$.
$f_1 = \{(a, X), (b, X), (c, \varnothing)\}$ es una función de X a Y.
$f_2 = \{(a, X), (b, \varnothing)\}$ no es función de X a Y ya que $Dom\,(f) = \{a, b\} \neq X$.
$f_3 = \{(a, \varnothing), (b, X), (c, X), (a, X)\}$ no es función de X a Y ya que $(a, \varnothing), (a, X) \in f$ y $X \neq \varnothing$.
(*b*) Para cada conjunto X, existe una única función f de $\varnothing$ en X, que es $f = \varnothing$, llamada la **función vacía**.
(*c*) Sea X un conjunto. $f = \{(x, A) \in X \times \mathscr{P}(X) \mid x \in A\}$ es función si y sólo si $X = \varnothing$ o X tiene un único elemento.
(*d*) Para cada conjunto X, $f = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es una función de X a X, llamada la **función identidad** de X y la denotaremos por 1_X.
(*e*) Si X y Y son conjuntos y y_o un elemento fijo de Y, la función de X a Y dada por $f = \{(x, y_o) \mid x \in X\}$ se llama la **función constante** igual a y_o.
(*f*) Si X y Y son conjuntos arbitrarios no vacíos, la función π_1, de $X \times Y$ a X dada por $\pi_1 = \{((x, y), x) \mid (x, y) \in X \times Y\}$ se llama la **proyección de** $X \times Y$ **sobre** X y la función π_2 de $X \times Y$ a Y definida por $\pi_2 = \{((x, y), y) \mid (x, y) \in X \times Y\}$ se llama la **proyección de** $X \times Y$ **sobre** Y.

Notación 1.1. Para indicar que f es una función de X a Y generalmente se utilizan los siguientes símbolos

$$f : X \longrightarrow Y \text{ o bien } X \xrightarrow{f} Y .$$

Si $(x, y) \in f$, al elemento y lo denotaremos por $f(x)$. No hay posibilidad de confusión ya que para cada $x \in X$, $f(x)$ queda determinada de manera única por la definición de función.

Ejemplo 1.3.2. Con esta nueva notación en los incisos (*a*), (*d*), (*e*) y (*f*) del Ejemplo 1.3.1 tenemos
(*a*) $f_1 : \{a, b, c\} \longrightarrow \{X, \varnothing\}$ dada por $f_1(a) = X$, $f_1(b) = X$ y $f_1(c) = \varnothing$.
(*d*) $1_X : X \longrightarrow X$ definida por $1_X(x) = x$ para toda $x \in X$.
(*e*) $f : X \longrightarrow Y$ dada por $f(x) = y_0$, donde y_0 es un elemento fijo de Y.
(*f*) $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ dada por $\pi_1(x, y) = x$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ dada por $\pi_2(x, y) = y$.

***Teorema* 1.3.1.** *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : X' \longrightarrow Y'$ funciones, $f = g$ si y sólo si $X = X'$, $Y = Y'$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Definición 1.3.3. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y $X' \subseteq X$. La función $g : X' \longrightarrow Y$ dada por $g(x) = f(x)$ para cada $x \in X'$ se llama la* ***restricción de f*** *a X' y la denotaremos por $f|_{X'}$.*

En particular $1_X|_{X'} : X' \longrightarrow X$ se la llama la ***función inclusión*** *de X' en X.*

Definición 1.3.4. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$.*
(i) $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ se llama la ***imagen de A bajo la función*** *f.*
(ii) $f^{-1}[B] = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$ se llama ***la imagen inversa de*** *B* ***bajo*** *f.*

Definición 1.3.5. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones. La* ***composición de*** *f* ***con*** *g es la función $h : X \longrightarrow Z$ con regla de correspondencia $h(x) = g(f(x))$. A la función h se le denota por $g \circ f$. En diagramas*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \qquad X \xrightarrow[g\circ f]{} Z$$

Ejemplo 1.3.3.
(a) Si $f : X \longrightarrow Y$, entonces $f \circ 1_X = f$ y $1_Y \circ f = f$
(b) Sean $i_1 : X \longrightarrow X \times X$ e $i_2 : X \longrightarrow X \times X$ definidas por $i_1(x) = (x, x_0)$ e $i_2(x) = (x_0, x)$ donde x_0 es un elemento fijo de X. Entonces para cualesquiera $x, y \in X$,

$$(\pi_1 \circ i_1)(x) = x = (\pi_2 \circ i_2)(x), (\pi_1 \circ i_2)(x) = x_0 = (\pi_2 \circ i_1)(x),$$
$$(i_1 \circ \pi_1)(x, y) = (x, x_0), \ (i_1 \circ \pi_2)(x, y) = (y, x_0),$$
$$(i_2 \circ \pi_1)(x, y) = (x_0, x), \ (i_2 \circ \pi_2)(x, y) = (x_0, y).$$

Definición 1.3.6. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función*
(i) f se llama ***inyectiva*** *si para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$.*
(ii) f se llama ***suprayectiva*** *o* ***sobre*** *si $Im(f) = Y$.*
(iii) f se llama ***biyectiva*** *si es inyectiva y suprayectiva.*

Teorema **1.3.2.** *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones*
(1) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
(2) Si f y g son suprayectivas, entonces $g \circ f$ es suprayectiva.
(3) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva.

Teorema **1.3.3.** *Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ funciones*
(1) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
(2) Si $g \circ f$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.
(3) Si $g \circ f$ es biyectiva, entonces f es inyectiva y g es suprayectiva.

Definición 1.3.7. *Sea* $f : X \longrightarrow Y$
(i) Una función $g : Y \longrightarrow X$ *es un* ***inverso izquierdo*** *de* f *si* $g \circ f = 1_X$.
(ii) Una función $h : Y \longrightarrow X$ *es un* ***inverso derecho*** *de* f *si* $f \circ h = 1_Y$.

***Teorema* 1.3.4.** *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función. Son equivalentes*
(i) f *es inyectiva,*
(ii) f *tiene un inverso izquierdo,*
(iii) Para cualesquiera funciones $g, h : Z \longrightarrow X$, $f \circ g = f \circ h$ *implica* $g = h$.

***Teorema* 1.3.5.** *Sea* $f : X \longrightarrow Y$ *una función. Son equivalentes*
(i) f *es suprayectiva.*
(ii) f *tiene un inverso derecho.*
(iii) Para cualesquiera funciones $g, h : Y \longrightarrow Z$, $g \circ f = h \circ f$ *implica* $g = h$.

***Teorema* 1.3.6.** *Una función* $f : X \longrightarrow Y$ *es biyectiva si y sólo si existe una única función* $g : Y \longrightarrow X$ *tal que* $g \circ f = 1_X$ *y* $f \circ g = 1_Y$.

Nota 4. La función g del Teorema 1.3.6 se llama la **función inversa** de f y se denota por $\boldsymbol{f^{-1}}$. Es claro de los Teoremas 1.3.4 y 1.3.5 que si f es una función biyectiva, entonces f^{-1} es una función biyectiva.

Con el concepto de función podemos dar una nueva descripción de una familia de conjuntos. En muchas ocasiones es muy cómodo trabajar con conjuntos, en particular cuando se trata de familias de conjuntos, distinguiendo a sus elementos por subíndices, como por ejemplo $\{\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z\}$ ó $\{\Lambda_i \mid i \in I\}$ donde $I = \{x, y, z\}$.

Formalicemos este concepto un poco mejor. Sea $\mathcal{C}$ un conjunto a cuyos elementos pretendemos indicar con los índices i de un conjunto I y sea $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{C}$ una función suprayectiva. Podemos describir a $\mathcal{C}$ como la imagen de φ de tal manera que si denotamos $\varphi(i) = \Lambda_i \in \mathcal{C}$, tendremos que $\mathcal{C}$ se puede describir como $\mathcal{C} = \{\Lambda_i \mid i \in I\}$ ó como $\mathcal{C} = \{\Lambda_i\}_{i \in I}$ y así diremos que $\mathcal{C}$ es un **conjunto indicado**, con I como el conjunto de índices. Es decir, si $\mathcal{C} = \{\Lambda_i\}_{i \in I}$ entenderemos que está dada una función suprayectiva $\varphi : I \longrightarrow \mathcal{C}$, tal que $\varphi(i) = \Lambda_i$ y en este caso $\mathcal{C}$ recibe el nombre de **familia indicada**.

Ejemplo 1.3.4. Si $I = \{a, b, c, d\}$ y $\mathfrak{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de subconjuntos de X, esto significa que $\mathfrak{F} = \{A_a, A_b, A_c, A_d\}$ donde $A_i \subseteq X$ para $i = a, b, c, d$. Entonces

$$\bigcup_{A \in \mathfrak{F}} A = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\} = A_a \cup A_b \cup A_c \cup A_d.$$

§ 1.4 Relaciones de equivalencia

Definición 1.4.1. *Sea X un conjunto y R una relación de X a X. Diremos que R es una* ***relación de equivalencia*** *en X, si satisface las siguientes condiciones*

(1) *Para cada $x \in X$, $(x, x) \in R$,* *(Propiedad reflexiva)*
(2) *Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \in R$,* *(Propiedad simétrica)*
(3) *Si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$.* *(Propiedad transitiva)*

Es inmediato de la definición que, si R es una relación de equivalencia entonces $Dom(R) = X$, $Ran(R) = X$.

Nota 5. Si R es una relación de equivalencia en un conjunto X y $x, y \in X$ son tales que $(x, y) \in R$, escribiremos $x \sim_R y$ en lugar de $(x, y) \in R$, y cuando no pueda haber confusión omitiremos la R de la siguiente manera $x \sim y$. En caso de que $(x, y) \notin R$ lo denotaremos como $x \nsim y$.

Ejemplo 1.4.1.
(a) Sea X cualquier conjunto. Entonces $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ y $X \times X$ son relaciones de equivalencia en X. Con la notación dada en la Nota 5, la relación Δ_X queda definida por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x = y$$

(b) Sean $X = \{a, b, c\}$ y $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\}$ es una relación de equivalencia en X. $R' = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$ no es de equivalencia ya que no satisface (ii) de la Definición 1.4.1, es decir, no es simétrica, ya que $(a, c) \in R'$ y $(c, a) \notin R'$.
(c) Sea $X = \{a\}$. La única relación de equivalencia en X es $\{(a, a)\}$.

Notación 1.2. En lo que sigue en $\sim_R$ omitiremos la R cuando no haya posibilidad de confusión.

Definición 1.4.2. *Sea R una relación de equivalencia en X y $a \in X$. La* ***clase de equivalencia de*** *a respecto a R, (o la R-**clase de equivalencia de** a) es el subconjunto de X definido por*

$$[a]_R = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

Nota 6. Debido a que $a \sim a$ para toda $a \in X$ en una relación de equivalencia R, entonces $a \in [a]$, y por lo tanto, $[a]_R \neq \varnothing$ para toda $a \in X$. Cuando no es posible que haya confusión a la clase de $[a]_R$ la denotaremos simplemente por $[a]$.

***Teorema* 1.4.1.** *Sea R una relación de equivalencia en X. Son equivalentes*
(1) $[a] = [b]$.
(2) $a \sim b$.
(3) $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Como $a \in [a] = [b]$, entonces por definición $a \sim b$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supongamos que $a \sim b$ y sea $x \in [a]$. Entonces $x \sim a$ y, por transitividad, $x \sim b$. lo que significa que $x \in [b]$ y así $[a] \cap [b] \neq \varnothing$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos $[a] \cap [b] \neq \varnothing$ y sea $x \in [a] \cap [b]$. Entonces $x \sim a$ y $x \sim b$ y por ser R transitiva y simétrica se tiene que $a \sim b$. Si $y \in [a]$ entonces $y \sim a$ y por lo tanto, nuevamente por transitividad $y \sim b$ y así $y \in [b]$. Análogamente se prueba que $[b] \subseteq [a]$. ■

Dada una relación de equivalencia R, a cualquier $x \in [a]_R$ se le llama un **representante de la clase** $[a]_R$.

***Corolario* 1.4.2.** *Sea R una relación de equivalencia en X. Si $a, b \in X$, entonces $[a] = [b]$ o $[a] \cap [b] = \varnothing$.*

Veremos ahora que si R es una relación de equivalencia, el conjunto de clases de equivalencia, es decir, $\{[a] \mid a \in X\}$ tiene ciertas propiedades muy especiales. Para ello introducimos la siguiente

Definición 1.4.3. *Sea X un conjunto y $\{X_i\}_{i \in I}$ (ver página 12) una familia indicada de subconjuntos de X. Diremos que $\{X_i\}_{i \in I}$ es una* ***partición*** *de X si satisface las condiciones siguientes*
(1) $X_i \neq \varnothing$ *para cada* $i \in I$,
(2) $X_i \cap X_j = \varnothing$ *para cada* $i, j \in I$ *con* $X_i \neq X_j$,
(3) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$.

Ejemplo 1.4.2.
(a) Para cualquier conjunto $X \neq \varnothing$, $\{X\}$ es una partición de X.
(b) Sean $X = \{a, b, c, d, e\}$, $X_1 = \{a, b\}$, $X_2 = \{c\}$ y $X_3 = \{d, e\}$. $\{X_1, X_2, X_3\}$ es una partición de X.
(c) Sea $X = \{a, b, c\}$. Sean $X_1 = \{a, b\}$ y $X_2 = \{a, c\}$. $\{X_1, X_2\}$ no es una partición de X ya que $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing$ con $X_1 \neq X_2$, es decir, no satisface la condición (ii) de la definición.

Veremos ahora que cada relación de equivalencia en un conjunto X induce una partición en X, e inversamente, cada partición de X induce una relación de equivalencia en X. Para ello definimos

$$\mathfrak{R} = \{\text{relaciones de equivalencia en } X\} \text{ y } \mathfrak{P} = \{\text{particiones de } X\},$$

para fines prácticos, para cada relación de equivalencia R (ó $R \in \mathfrak{R}$), denotemos por $P_R = \{[a]_R \mid a \in X\}$.

***Lema* 1.4.3.** *Sea X un conjunto y R una relación de equivalencia en X, entonces $P_R = \{[a] \mid a \in X\}$ es una partición de X.*

Demostración. De la Nota 6 y del Corolario 1.4.2 (página 13) se tiene que $[a] \neq \varnothing$ y $[a] \cap [b] = \varnothing$ si $[a] \neq [b]$. Por último, es inmediato que $\bigcup_{a \in X} [a] = X$. ■

Si X es un conjunto y $P = \{X_i\}_{i \in I}$ una partición de X, definimos R_P como la siguiente relación en X, para $a, b \in X$ decimos que a esta relacionado con b ($a \sim_{R_P} b$) si y sólo si a y b pertenecen al mismo conjunto X_i.

***Lema* 1.4.4.** *Sea X un conjunto y $P = \{X_i\}_{i \in I}$ una partición de X, entonces R_P es de equivalencia.*

Demostración. Claramente R_P es reflexiva y simétrica.

Si $a \sim_{R_P} b$ y $b \sim_{R_P} c$, entonces existen $i, j \in I$ tales que $a, b \in X_i$ y $b, c \in X_j$. Pero como cada elemento de X pertenece a uno y sólo uno de los X_i se tiene que $i = j$ por lo que $a \sim_{R_P} c$, y así $\sim_{R_P}$ es transitiva. Por lo tanto $\sim_{R_P}$ es de equivalencia. ■

Definimos

$$\eta : \mathfrak{R} \to \mathfrak{P} \text{ como } \eta(R) = P_R$$

y

$$\nu : \mathfrak{P} \to \mathfrak{R} \text{ como } \nu(P) = R_P.$$

Los Lemas 1.4.3 y 1.4.4 muestran que η y ν están bien definidas, así que para terminar con el trabajo sólo falta el siguiente

***Teorema* 1.4.5.** *Si η y ν son las funciones definidas arriba entonces $\eta \circ \nu = 1_{\mathfrak{P}}$ y $\nu \circ \eta = 1_{\mathfrak{R}}$.*

Demostración. En primer lugar mostraremos que $\eta \circ \nu = 1_{\mathfrak{P}}$. Sea $P \in \mathfrak{P}$, con $P = \{X_i \mid i \in I\}$. Debemos mostrar que $P_{R_P} = P$, es decir, $P_{R_P} = (\eta \circ \nu)(P) = \eta(R_P) = P$.

Sea $[a]_{R_P} \in P_{R_P}$. Por ser P una partición, $a \in X_j$ para algún $j \in I$ y dado $i \in I$, si $i \neq j$, $a \notin X_i$. Entonces

$$\begin{aligned}[a]_{R_P} &= \{b \in X \mid a \sim_{R_P} b\} \\ &= \{b \in X \mid \text{existe } i \in I \text{ tal que } a, b \in X_i \ \} = X_j,\end{aligned}$$

esto es, $[a]_{R_P} \in P$. Por lo tanto $P_{R_P} \subseteq P$.

Sea ahora $X_j \in P$. Dado $a \in X_j$ tenemos que $[a]_{R_P} = X_j$, i.e., $X_j \in P_{R_P}$ y por lo tanto $P \subseteq P_{R_P}$.

Para finalizar la demostración veremos que $\nu \circ \eta = 1_{\mathfrak{R}}$. Sea R una relación de equivalencia en X. Entonces

$$(\nu \circ \eta)(R) = \nu(P_R) = \nu(\{[a]_R \mid a \in X\})$$

ahora demostraremos que $a \sim_R b$ si y sólo si $a \sim_{\nu(P_R)} b$.

Tomemos $a \sim_R b$. Entonces, por el Teorema 1.4.1, $a, b \in [a]_R \in P_R$ y por lo tanto $a \sim_{\nu(P_R)} b$.

Por otro lado si $a \sim_{\nu(P_R)} b$, entonces existe $X_i \in P_R$ tal que $a, b \in X_i$. Como $X_i = [c]_R$ para alguna $c \in X$, entonces $a, b \in [c]_R$ lo que implica que $a \sim_R b$.

Por lo tanto $\nu(P_R) = R$, y así $\nu \circ \eta = 1_R$. ■

Dada una relación de equivalencia R en X, denotaremos por X/R al conjunto de clases de equivalencia respecto a R y lo llamaremos **el conjunto cociente** de X respecto a R. Existe además una función natural $\digamma : X \to X/R$ definida por $\digamma(a) = [a]$ a la que llamaremos la **función canónica** de X en su conjunto cociente X/R. Esta función es suprayectiva y además $\digamma(x) = \digamma(y)$ si y sólo si $x \sim y$.

§ 1.5 Relaciones de orden

En esta sección estudiaremos un tipo de relación de gran importancia para nuestro estudio que es la **relación de orden** en un conjunto.

Definición 1.5.1. *Una relación R de X a X se llama **orden parcial** sobre X si satisface*
(1) $(a, a) \notin R$ *para toda* $a \in X$,
(2) *Si* $(a, b), (b, c) \in R$, *entonces* $(a, c) \in R$.

Un orden parcial lo denotaremos por $<$, y si X es un conjunto con un orden parcial $<$, en este caso diremos que $(X, <)$ es un **conjunto parcialmente ordenado**.

Además si $x, y \in X$ y $x < y$ diremos que x **es menor que** y, y si no sucede que $x < y$ lo denotaremos por $x \not< y$.

***Proposición* 1.5.1.** *Sea $<$ un orden parcial sobre X. Si $a < b$ entonces $b \not< a$.*

Demostración. Es inmediato de la definición de orden parcial. ■

Definición 1.5.2. *Si $<$ es un orden parcial sobre X, por $a \leq b$ (a es **menor o igual** a b) entenderemos que se cumple, $a < b$ ó $a = b$.*

Es claro, debido a que $<$ es un orden parcial, que las dos posibilidades, $a < b$ y $a = b$, mencionadas en la definición sólo puede cumplirse una de ellas y no ambas.

***Proposición* 1.5.2.** *Sea $<$ un orden parcial sobre X. Entonces*
(1) *$a \leq a$ para toda $a \in X$,*
(2) *Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$,*
(3) *Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.*

Inversamente.

***Proposición* 1.5.3.** *Sea $\sim$ una relación sobre X que satisface*
(1) *$a \sim a$ para toda $a \in X$,*
(2) *Si $a \sim b$ y $b \sim a$, entonces $a = b$,*
(3) *Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$.*

Entonces la relación sobre X definida por

$$\text{“}a < b \text{ si y sólo si } a \sim b \text{ y } a \neq b\text{”},$$

es un orden parcial.

De las Proposiciones 1.5.2 y 1.5.3 tenemos entonces que los órdenes parciales $<$ y las relaciones $\leq$ que satisfacen las tres propiedades mencionadas en la Proposición 1.5.3 están en correspondencia biyectiva y por lo tanto trabajamos con $<$ o $\leq$ indistintamente, esto es, si queremos demostrar que un conjunto $(X, <)$ es parcialmente ordenado debemos verificar que se cumplan las condiciones (a) y (b) de la Definición 1.5.1, mientras que si usamos $\leq$ debemos demostrar que $(X \leq)$ satisface las condiciones $(1), (2)$ y (3) de la Proposición 1.5.2.

Dado un orden parcial $<$ sobre X, diremos que a y b con **comparables** si $a = b$ o $a < b$ o $b < a$. En caso de que no se cumpla ninguna de las tres, diremos que a y b son **no comparables**.

Ejemplo 1.5.1.
(a) Sea A un conjunto y $X = \mathscr{P}(A)$, el conjunto potencia de A. Definimos para B, $B' \in \mathscr{P}(A)$, $B < B'$ si $B \subset B'$.
$<$ es un orden parcial sobre $\mathscr{P}(A)$. Además si A tiene más de un elemento entonces existen elementos en $\mathscr{P}(A)$ que no son comparables respecto a esta relación.
(b) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Definimos el siguiente orden en X, $a < b$, $b < c$, $c < d$, $a < c$, $a < d$, $b < d$. Se puede ver fácilmente que $<$ es un orden parcial en X. Además a diferencia del ejemplo anterior, en este caso todos los elementos están relacionados, es decir, para cualesquiera dos elementos de X uno de ellos es menor que el otro.

Definición 1.5.3. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $a \in X$*
*(i) a se llama **máximo (mínimo)** si para todo elemento a' de X se tiene que $a' \leq a$ $(a \leq a')$.*
*(ii) a se llama **maximal (minimal)** si no existe $a' \in X$ tal que $a < a'$ $(a' < a)$.*

Un elemento máximo (mínimo) es comparable con cada elemento de X, lo que no sucede en general con los maximales (minimales), es más, puede suceder que un maximal (minimal) no sea comparable con ningún elemento de X, salvo con sí mismo.

Si un elemento a es máximo (mínimo) entonces es maximal (minimal). El recíproco en general no es cierto. Más adelante veremos que para ciertos órdenes, maximal coincide con máximo y minimal con mínimo.

***Proposición* 1.5.4.** *En un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ a lo más hay un máximo (mínimo).*

Demostración. Como un máximo (mínimo) es comparable con todos los demás elementos de X, si hubiese dos máximos (mínimos) a y a' entonces tendríamos que $a \leq a'$ y $a' \leq a$; por la Proposición 1.5.2 (2) se tiene que $a = a'$. ■

A diferencia de un máximo (mínimo) puede haber varios maximales (minimales) en un conjunto parcialmente ordenado. Por ejemplo si $A = \{a, b\}$, entonces $(\mathscr{P}(A) - \{A\}, \subset)$ tiene dos maximales que son $\{a\}$ y $\{b\}$, sin embargo como tiene mínimo que es $\varnothing$, solamente tiene un minimal que por supuesto es $\varnothing$.

Definición 1.5.4. *Un orden parcial en un conjunto X se llama* ***orden total*** *o* ***lineal*** *si cualesquiera dos elementos de X son comparables, es decir, si $a, a' \in X$ entonces $a < a'$ o $a' < a$ o $a = a'$. A un conjunto con un orden total se le llama* ***conjunto totalmente ordenado****.*

Dado que partimos de un orden parcial en la definición de orden total, en realidad no es necesario pedir que se cumpla sólo una de las tres propiedades de $a < b$ o $b < a$ o $a = b$, ya que el hecho de ser $<$ un orden parcial no permite que se satisfaga más de una (Proposición 1.5.1).

Ejemplo 1.5.2.
(a) Dado un conjunto X, $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ es un conjunto totalmente ordenado si y sólo si X tiene a lo más un elemento.
(b) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Definimos el siguiente orden en X : $a < b$, $b < c$, $c < d$, $a < c$, $a < d$, y $b < d$, entonces $(X, <)$ es un orden total.

Definición 1. 5.5. *Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y $Y \subseteq X$. Diremos que un elemento $a \in X$ es una* ***cota superior*** *(****cota inferior****) de Y en X, si para todo elemento x de Y se tiene que $x \leq a$ ($a \leq x$). Si el conjunto de cotas superiores (inferiores) de Y tiene mínimo (máximo), a éste se le llama* ***supremo*** *(****ínfimo****) de Y en X.*

Ejemplo 1.5.3.
(a) Sea X un conjunto y $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$, entonces si $B \subseteq \mathscr{P}(X)$, $\bigcup_{C \in B} C$ es el supremo de B en $\mathscr{P}(X)$ y $\bigcap_{C \in B} C$ es el ínfimo de B en $\mathscr{P}(X)$.
(b) Sea X un conjunto. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$, y sea $\varnothing \neq A \subseteq X$ y $B = \mathscr{P}(A) - \{A\} \subseteq \mathscr{P}(X)$, entonces $\bigcap_{C \in B} C$ es el ínfimo de B y $\bigcup_{C \in B} C = A$ es el supremo de B. Nótese que en este caso el supremo de B es A y no pertenece al conjunto B.

Definición 1.5.6. *Un subconjunto Y de un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$ se llama una* ***cadena*** *en $(X, <)$ si $(Y, <)$ es un conjunto totalmente ordenado.*

Un caso particular de orden total es el de *buen orden* que definimos a continuación.

Definición 1.5.7. *Sea $<$ un orden parcial en X. $<$ se llama un* ***buen orden*** *si cada subconjunto no vacío de X tiene mínimo, y en este caso decimos que $(X, <)$ es un* ***conjunto bien ordenado****.*

***Proposición* 1.5.5.** *Si $<$ es un buen orden entonces es un orden total.*

Demostración. Dados $a, b \in X$, basta tomar $\{a, b\}$ y aplicar el hecho de que $<$ es un buen orden. ■

§ 1.6 Ejercicios

1.1. Demuestre los Teoremas 1.1.1 y 1.1.2.

1.2. Demuestre las Proposiciones 1.1.3, 1.1.4 y 1.1.5.

1.3. Sean A, B y C conjuntos, demuestre que
(i) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (C)$.
(ii) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
(iii) $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

1.4. Si A, B y C conjuntos, demuestre que

$$A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$$

de lo anterior deducir que es posible definir la intersección de conjuntos a partir de la diferencia.

1.5. Sean A, B y C conjuntos, demostrar que
(i) $A - B = A$ si y sólo si $A \cap B = \varnothing$.
(ii) $A - (B - C) = (A - B) - C$ si y sólo si $A \cap C = \varnothing$.

1.6. Demuestre las Proposiciones 1.1.6 y 1.1.10.

1.7. Sean A, B y C conjuntos. Pruebe que
(i) $C = A \cup B$ si y sólo si $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ y para todo conjunto X, si $A \subseteq X$ y $B \subseteq X$, entonces $C \subseteq X$.
(ii) $C = A \cap B$ si y sólo si $C \subseteq A$, $C \subseteq B$ y para todo conjunto X, si $X \subseteq A$ y $X \subseteq B$, entonces $X \subseteq C$.

1.8. Demuestre el Teorema 1.1.8.

1.9. Para cualesquiera dos conjuntos A y B definimos

$$A + B = (A - B) \cup (B - A)$$

llamada la **diferencia simétrica** de A y B, y $A * B = A \cap B$.
(i) Pruebe que para cualquier conjunto X, $(\mathscr{P}(X), +, *)$ es un anillo conmutativo con unidad, es decir, para cualesquiera $A, B, C \in \mathscr{P}(X)$ se tiene que

(a) $(A + B) + C = A + (B + C)$,
(b) $A + B = B + A$,
(c) Existe $0 \in \mathscr{P}(X)$ tal que $A + 0 = A$,
(d) Para cada $A \in \mathscr{P}(X)$ existe $B \in \mathscr{P}(X)$ tal que $A + B = 0$;
(e) $(A * B) * C = A * (B * C)$,
(f) $A * B = B * A$,

(g) Existe $I \in \mathscr{P}(X)$ tal que $A * I = A$,
(h) $A * (B + C) = (A + B) * (A + C)$.
(*ii*) Demuestra que cada elemento de $\mathscr{P}(X)$ es idempotente, es decir $A * A = A$.

1.10. Si $(R, +, *)$ es un anillo, un ideal $\mathcal{I}$ del anillo R es un subconjunto de R que cumple

(a) $\mathcal{I}$ es un grupo abeliano con la suma restringida de R, es decir, para toda $a, b, c \in \mathcal{I}$ se tiene

(*i*) $(a + b) + c = a + (b + c)$
(*ii*) $a + b = b + a$
(*iii*) Existe un elemento en $\mathcal{I}$ que denotaremos 0 tal que $a + 0 = a$
(*iv*) Para toda $a \in \mathcal{I}$ existe $b \in \mathcal{I}$ tal que $a + b = 0$

(b) $\forall r \in R$ y $\forall b \in \mathcal{I}$ $r * b \in \mathcal{I}$.

Con respecto al ejercicio anterior. Muestra que si $A \subseteq X$, entonces $\mathscr{P}(A)$ es un ideal de $\mathscr{P}(X)$.

1.11. Sean X y Y conjuntos Definimos $\langle x, y\rangle = \{\{x, \varnothing\}, \{y, \{\varnothing\}\}\}$ donde $x \in X$ y $y \in Y$. Demostrar que $\langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$ si y sólo si $x = x'$ y $y = y'$. Esta es una definición alternativa para la pareja ordenada (x, y).

1.12. Sea X un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{K}$ de $\mathscr{P}(X)$ es una **dirección en** X si satisface

(a) $\mathcal{K} \neq \varnothing$ y $\varnothing \notin \mathcal{K}$,
(b) Para todo $A, B \in \mathcal{K}$ existe $C \in \mathcal{K}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.

Probar que para todo $a \in X$, $N_a = \{Y \subseteq X \mid a \in Y\}$ es una dirección en X.

1.13. Sea X un conjunto. Un subconjunto $\mathcal{F}$ de $\mathscr{P}(X)$ es un **filtro** en X si satisface

(a) $\mathcal{F}$ es una dirección,
(b) Para todo $B \subseteq X$, si existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathcal{F}$. Probar que el conjunto N_a del ejercicio anterior es un filtro.

1.14. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un conjunto X y sea $A \subseteq X$. Probar que $\mathcal{F}_A = \{L \cap A \mid L \in \mathcal{F}\}$ es un filtro en A si y sólo si $L \cap A = \varnothing$ para todo $L \in \mathcal{F}$.

1.15. Sean $\mathcal{K}_1$ y $\mathcal{K}_2$ direcciones en X_1 y X_2 respectivamente. Si

$$\mathcal{K} = \{A \times B |\ A \in \mathcal{K}_1 \text{ y } B \in \mathcal{K}_2\}$$

entonces $\mathcal{K}$ es una dirección en $X_1 \times X_2$.

1.16. Demuestre el inciso (3) del Teorema 1.2.2.

1.17. Sea $\{R_i\}_{i\in I}$ una familia de relaciones de A a B y sea R una relación de B a C. Probar que

$$R \circ \left(\bigcup_{i\in I} R_i \right) = \bigcup_{i\in I} (R \circ R_i).$$

1.18. Probar los Teoremas 1.3.1, 1.3.2 y 1.3.3.

1.19. Dé un ejemplo de funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g :\longrightarrow C$ tales que $g \circ f$ sea inyectiva y g no lo sea.

1.20. Probar los Teoremas 1.3.4, 1. 3.5 y 1.3.6.

1.21. Dé un ejemplo de funciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ tales que $g \circ f$ sea suprayectiva, pero f no lo sea.

1.22. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ funciones. Probar
(i) $g \circ f$ es inyectiva si y sólo si f es inyectiva y $g|_{Im(f)} : Im\,(f) \longrightarrow C$ es inyectiva,
(ii) $g \circ f$ es suprayectiva si y sólo si $g|_{Im(f)} : Im\,(f) \longrightarrow C$ es suprayectiva.

1.23. Probar que si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y además $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

1.24. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Probar
(i) Si $S \subseteq T \subseteq A$ entonces $f[S] \subseteq f[T]$,
(ii) Si $U \subseteq V \subseteq B$ entonces $f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[V]$,
(iii) Sea $F : \mathscr{P}(A) \longrightarrow \mathscr{P}(B)$ definida por $F(S) = f[S]$ y $G : \mathscr{P}(B) \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ definida por $G(U) = f^{-1}[U]$. Si f es suprayectiva entonces $F \circ G = I_{\mathscr{P}(B)}$ y si f es inyectiva entonces $G \circ F = I_{\mathscr{P}(A)}$.

1.25. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Sean $S, T \subseteq A$ y $U, V \subseteq B$. Probar
(i) $f[S \cup T] = f[S] \cup f[T]$,
(ii) $f^{-1}[U \cup V] = f^{-1}[U] \cup f^{-1}[V]$,
(iii) $f[S \cap T] \subseteq f[S] \cap f[T]$ y $f[S \cap T] = f[S] \cap f[T]$ si y sólo si f es inyectiva,
(iv) $f^{-1}[U \cap V] = f^{-1}[U] \cap f^{-1}[V]$.

1.26. Generaliza el ejercicio anterior para uniones e intersecciones arbitrarias.

1.27. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. Probar
(i) Para todo $U \subseteq B$, $f^{-1}[B - U] = A - f^{-1}[U]$,
(ii) Para todo $S \subseteq A$, $B - f[S] \subseteq f[A - S]$ si y sólo si f es suprayectiva,
(iii) Para todo $S \subseteq A$, $f[A - S] \subseteq B - f[S]$ si y sólo si f es inyectiva.

1.28. Sea m un elemento fijo de un conjunto X y sea $f : X \longrightarrow X$ la función constante igual a m. Probar
(i) $f \circ g = f$ para toda función $g : X \longrightarrow X$.
(ii) Recíprocamente, si $f : X \longrightarrow X$ es una función tal que $f \circ g = f$ para toda función $g : X \longrightarrow X$, entonces existe $m \in X$ tal que $f(x) = m$ para todo $x \in X$.

1.29. Sea $f : A \longrightarrow A$ una función. Probar
(i) Si $S, T \subseteq A$ tal que $f[S] = S$ y $f[T] = T$ entonces

$$f[S \cup T] = f[S] \cup f[T].$$

(ii) Generalice (i) para cualquier familia arbitraria de subconjuntos de A.
(iii) Existe un único subconjunto S de A, máximo con respecto a la inclusión de conjuntos con la propiedad de que $f[S] = S$.
(iv) Si $S, T \subseteq A'$ son tales que f restringida a cada uno de ellos es inyectiva, ¿es necesariamente f inyectiva en $S \cup T$?

1.30. Sean A, B conjuntos y sean π_1 y π_2 las proyecciones de $A \times B$ en A y B respectivamente. Probar que para cualquier conjunto X y para cualesquiera funciones $f : X \longrightarrow A$, $g : X \longrightarrow B$ existe una única función $h : X \longrightarrow A \times B$ tal que $\pi_1 \circ h = f$ y $\pi_2 \circ h = g$.

1.31. Sean A, B, C, D conjuntos y sean $f : A \longrightarrow C$ y $g : B \longrightarrow D$ funciones. Definir una función natural $h : A \times B \longrightarrow C \times D$ tal que si f y g son biyectivas, entonces h es biyectiva.

1.32. Sean A, B, C y D conjuntos y $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow D$ funciones. Definir una función "natural" $k : Func(C, B) \longrightarrow Func(A, D)$, donde para conjuntos arbitrarios L y M, $Func(L, M)$ denota el conjunto de funciones de L en M.

1.33. Sean A, B y C conjuntos. Definir una función "natural"

$$f : Func(A, Func(B, C)) \longrightarrow Func(A \times B, C)$$

y probar que ésta es una biyección.

1.34. Sean A, B y C conjuntos. Definir una función "natural"

$$f : Func(C, A \times B) \longrightarrow Func(C, A) \times Func(C, B)$$

y probar que ésta es una biyección.

1.35. Sea B un conjunto, $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones tal que para cualesquiera $i, j \in I$, $f_i(x) = f_j(x)$ para todo $x \in Dom(f_i) \cap Dom(f_j)$. Probar que existe una función f con dominio $D = \bigcup_{i\in I} Dom(f_i)$ tal que para cada $i \in I$, $f(x) = f_i(x)$ para todo $x \in Dom(f_i)$.

1.36. Sea B un conjunto, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y sea, para cada $i \in I$, $f_i : A_i \longrightarrow B$ una función. Suponga que para cada $i, j \in I$, $f_i|_{(A_i\cap A_j)} = f_j|_{(A_i\cap A_j)}$. Probar que existe una función $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow B$ tal que $f|_{A_i} = f_i$ para todo $i \in I$.

1.37. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar
(i) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X(véase, Ejercicio 1.13), entonces $f(\mathcal{F})$ es una dirección en Y(véase, Ejercicio 1.12). Además, si f es suprayectiva entonces $f(\mathcal{F})$ es un filtro en Y,
(ii) Si $\mathcal{K}$ es una dirección en Y, entonces $f^{-1}(\mathcal{K})$ es una dirección en X si y sólo si $G \cap f(X) \neq \varnothing$ para todo $G \in \mathcal{K}$.

1.38. Demuestre el Corolario 1.4.2.

1.39. Sea R una relación en un conjunto X. Probar que $R \cup R^{-1}$ es la relación simétrica más pequeña que contiene a R y que $R \cap R^{-1}$ es la más grande contenida en R.

1.40. Sea R una relación reflexiva y transitiva en un conjunto X. Probar que $R \circ R = R$.

1.41. Sea R una relación en un conjunto X. Probar que R es de equivalencia si y sólo si $\Delta_X \subseteq R$ y $R \circ R^{-1} \circ R = R$, donde $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

1.42. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia en un conjunto X. Probar que $R_2 \circ R_1$ es una relación de equivalencia en X si y sólo si $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$. Probar además que cuando esta condición se satisface entonces $R_2 \circ R_1$ es la intersección del conjunto de todas las relaciones de equivalencia en X que contienen a R_1 y R_2.

1.43. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X. Sea $A \subseteq R$ tal que la imagen de la proyección π_1 en A es X. Probar que $R \circ A = R$ y que si S es cualquier relación, entonces $(R \cap S) \circ A = R \cap (S \circ A)$.

1.44. Sean A y B conjuntos y f una función de A a B. Sea

$$R_f = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}.$$

Probar
(i) R_f es una relación de equivalencia en A y la llamaremos la **relación de equivalencia asociada a** f.
(ii) Si $F = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ entonces $R_f = F^{-1} \circ F$.

1.45. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X y sea $\digamma : X \longrightarrow X/R$ la función canónica (ver página 16) de X en X/R. Probar que R es la relación de equivalencia asociada a $\digamma$.

1.46. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X, sea $\digamma : X \longrightarrow X/R$ la función canónica de X en X/R y sea A un subconjunto de X. Diremos que A es **saturado** respecto a R si para cada $a \in A$, $[a] \subseteq A$. Probar
(i) A es saturado respecto a R si y sólo si A es unión de clases de equivalencia respecto a R.
(ii) A es saturado respecto a R si y sólo si $\digamma^{-1}(\digamma(A)) = A$.

1.47. Sea R una relación de equivalencia en un conjunto X, sea $\digamma$ la función canónica de X en X/R y sea B un subconjunto de X. Probar
(i) $\digamma^{-1}(\digamma(B))$ es el subconjunto saturado más pequeño de X con respecto a la inclusión que contiene a B. Llamaremos a este conjunto **saturación** de B respecto a R.
(ii) Sea f una función de X en un conjunto Y. Existe una función $h : X/R \longrightarrow Y$ tal que $f = h \circ \digamma$ si y sólo si para todo $(x, y) \in R$ se tiene que $f(x) = f(y)$.

1.48. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función, R y S relaciones de equivalencia en X y Y respectivamente, $\digamma_R$ y $\digamma_S$ las funciones canónicas de X en X/R y de Y en Y/S respectivamente. Probar que existe una función $h : X/R \longrightarrow Y/S$ tal que $h \circ \digamma_R = \digamma_S \circ f$ si y sólo si para todo $(x, y) \in R$ se tiene que $(f(x), f(y)) \in S$.

1.49. Sean R y S relaciones de equivalencia en un conjunto X, tal que $S \subseteq R$. Defina una relación de equivalencia "natural" R/S en X/S de tal manera que exista una biyección de X/R en $(X/S)/(R/S)$.

1.50. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función. Un subconjunto A de X se llama **f-invariante** si $f(A) \subseteq A$. Un conjunto f-invariante se llama **inescindible** si no puede ser expresado como unión ajena de conjuntos no vacíos f-invariantes. Probar que A se expresa de manera única como unión ajena

de conjuntos inescindibles f-invariantes (*Sugerencia: Defina una relación de equivalencia adecuada*).

1.51. Demuestre las Proposiciones 1.5.1 y 1.5.2.

1.52. Sea X un conjunto tal que $\mathscr{P}(X)$ es una cadena respecto a la inclusión. ¿Qué se puede decir de X?

1.53. Se dice que un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$ es una **retícula** si cada pareja de elementos $\{x, y\}$ de X tiene supremo e ínfimo en X y en este caso los denotaremos $x \vee y$ y $x \wedge y$ respectivamente. La retícula X será distributiva si para todo $x, y, z \in X$ se tiene que $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Probar que cualquier cadena es una retícula distributiva.

1.54. Se dice que X es una **retícula completa** si cada subconjunto de X tiene supremo e ínfimo en X. Sea X un conjunto. Probar que $(\mathscr{P}(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

1.55. Sea $(X, <)$ un conjunto parcialmente ordenado con la propiedad de que cualquier subconjunto de X tiene supremo. Suponga además que X tiene mínimo. Probar que X es una retícula completa. (*Sugerencia: Dado un subconjunto Y de X, considere el conjunto de cotas inferiores de Y*).

1.56. Sea X una retícula en la que cualquier subconjunto acotado superiormente tiene supremo. Probar que cualquier subconjunto de X, acotado inferiormente, tiene ínfimo.

1.57. Sea $\mathcal{C}$ una cadena y X un conjunto parcialmente ordenado. Sea $f : \mathcal{C} \longrightarrow X$ una función inyectiva tal que para todo $a, b \in \mathcal{C}$, si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$. Probar que si $f(a) < f(b)$ entonces $a < b$.

1.58. Sea X una retícula completa (ver, Ejercicio 1.54) y sea $f : X \longrightarrow X$ una función tal que para todo $a, b \in X$, si $a < b$ entonces $f(a) < f(b)$. Probar que f deja fijo a algún elemento de X , es decir, existe $x \in X$ tal que $f(x) = x$. (*Sugerencia: Considere el conjunto* $\{a \in X \mid a < f(a)\}$).

1.59. Sean $(A, <)$ un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$. Demostrar que $(B, <_B)$ es un conjunto bien ordenado, donde $<_B$ es el orden $<$ de A restringido a B.

Un subconjunto S de una cadena $(\mathcal{C}, <)$ se llama **segmento inicial** (**segmento final**), si para toda $x \in \mathcal{C}$ si $x < a$ $(a < x)$ para alguna $a \in S$, entonces $x \in S$.

1.60. Diremos que un subconjunto S de una cadena $(\mathcal{C}, <)$ es **convexo** si tiene la siguiente propiedad: Para todo $x \in \mathcal{C}$, si existen $a, b \in S$ tales que $a < x < b$, entonces $x \in S$. Probar que un subconjunto convexo S de una cadena $(\mathcal{C}, <)$ es la intersección de un segmento inicial de $\mathcal{C}$ con un segmento final de $\mathcal{C}$.

Capítulo 2

El Axioma de Elección y sus equivalencias

§ 2.1 Introducción

En este capítulo presentamos el Axioma de Elección junto con algunas de sus equivalencias entre las que se encuentran el Lema de Zorn, cuya importancia se hace evidente en los siguientes capítulos.

En el capítulo 1 definimos el producto cartesiano de $A \times B$ de una pareja de conjuntos A y B. En esta sección introduciremos la definición del producto cartesiano de una familia arbitraria de conjuntos.

Definición 2.1.1. *Dada una familia de conjuntos no vacíos* $\{A_i\}_{i\in I}$*, una* ***función de selección*** *para esta familia es una función*

$$f : \{A_i\}_{i\in I} \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$$

tal que $f(A_i) \in A_i$ *para toda* $i \in I$*.*

Esto corresponde a la idea de que dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos, se puede elegir simultáneamente un elemento de cada uno de los conjuntos de la familia.

Definición 2.1.2. *Dada una familia de conjuntos* $\{A_i\}_{i\in I}$*, su* ***producto cartesiano*** *es el conjunto*

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \{f \mid f \text{ es una función de selección para la familia } \{A_i\}_{i\in I}\}.$$

En el Capítulo 1 vimos, en la Proposición 1.1.10 inciso (3), que si A y B son conjuntos no vacíos entonces $A \times B$ es no vacío. Sin embargo para el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos no se puede demostrar que este resultado es verdadero, es decir que

$\underset{i\in I}{\times} A_i \neq \varnothing$. Debido a que no tenemos las herramientas necesarias en la Teoría de Conjuntos para hacerlo. Es por esto, entre otras razones, que debemos introducir como uno de los axiomas que sustentan a la Teoría de Conjuntos, al llamado Axioma de Elección que dice

Axioma de Elección *Dada una familia no vacía de conjuntos no vacíos, existe una función de selección para esta familia.*

Este axioma es evidentemente otra forma de decir que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.

Notación 2.3. A los elementos (funciones de selección) $f \in \underset{i\in I}{\times} A_i$, los denotaremos por $f = (a_i)_{i\in I}$ para cada $i \in I$, donde $f(A_i) = a_i$ para toda $i \in I$.

Así pues, con esta notación tenemos que

$$\underset{i\in I}{\times} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \mid a_i \in A_i \ \forall \ i \in I\}.$$

Cabe mencionar que en el caso en que $I = \{m, n\}$, $\underset{i\in I}{\times} A_i$ no coincide con el producto cartesiano $A_m \times A_n$ definido en el capitulo 1, sin embargo se puede demostrar sin ninguna dificultad que existe una biyección entre estos dos conjuntos.

§ 2.2 Equivalencias del Axioma de Elección

***Teorema* 2.2.1.** *Son equivalentes*
(1) ***Axioma de Elección.*** *Para cada familia $\mathcal{C}$ no vacía de conjuntos no vacíos existe una función $f : \mathcal{C} \longrightarrow \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ tal que $f(C) \in C$.*
(2) ***Principio maximal de Hausdorff.*** *Cada conjunto parcialmente ordenado tiene una cadena maximal.*[1]
(3) ***Lema de Zorn.*** *En un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$ si cada cadena en X tiene cota superior en X, entonces $(X, <)$ tiene al menos un maximal.*
(4) ***Teorema de Zermelo.*** *Cada conjunto acepta un buen orden, es decir, para cualquier conjunto X, existe una relación binaria $<$ sobre X tal que $(X, <)$ es bien ordenado.*

[1]Una cadena $\mathscr{C}$ en un conjunto parcialmente ordenado X es *maximal* si para cualquier cadena $\mathscr{C}'$ en X, si $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$, entonces $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.

Demostración.
(**1**) $\Longrightarrow$ (**2**) Sea $(X, <)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea

$$Cad(X) = \{C \subseteq X \mid C \text{ es una cadena}\}.$$

Como $\varnothing$ es una cadena en $(X, <)$, entonces $\varnothing \in Cad(X)$ y así $Cad(X) \neq \varnothing$. Consideremos el conjunto parcialmente ordenado $(Cad(X), \subseteq)$. Para cada $C \in Cad(X)$, definimos

$$Comp(C) = \{a \in X \mid \text{para todo } b \in C \ a \leq b \ \text{ ó } b \leq a\}.$$

Por definición de cadena (véase Definición 1.5.6 pág. 19) $C \subseteq Comp(C)$ y además $Comp(C) - C \neq \varnothing$ si y sólo si C no es una cadena maximal.

Sea

$$Cad_0(X) = \{C \in Cad(X) \mid Comp(C) - C \neq \varnothing\} \subseteq Cad(X).$$

Si $Cad_0(X) = \varnothing$ entonces toda cadena C en X es maximal y el resultado se tiene. Supongamos ahora que $Cad_0(X) \neq \varnothing$, esto implica que la familia $\{Comp(C) - C\}_{C \in Cad_0(X)} \neq \varnothing$ y por construcción cada elemento de dicha familia es no vacío; así tenemos una familia no vacía de conjuntos no vacíos. Por el Axioma de Elección, existe una función

$$\varphi : \{Comp(C) - C\}_{C \in Cad_0(X)} \longrightarrow \bigcup_{C \in Cad_0(X)} \{Comp(C) - C\} \ ,$$

tal que $\varphi(Comp(C) - C) \in Comp(C) - C$. Sea ψ la función de $Cad_0(X)$ a $\{Comp(C) - C\}_{C \in Cad_0(X)}$ dada por $\psi(C) = Comp(C) - C$. Finalmente consideramos la función

$$f = \varphi \circ \psi : Cad_0(X) \longrightarrow \bigcup_{C \in Cad_0(X)} \{Comp(C) - C\}$$

que satisface $f(C) \in Comp(C) - C$.

Definimos

$$\begin{aligned} g : Cad(X) &\longrightarrow Cad(X) \\ C &\longmapsto \begin{cases} C \cup \{f(C)\} & \text{si } C \text{ no es maximal} \\ C & \text{si } C \text{ es maximal} \end{cases} \end{aligned}$$

Mostraremos que g tiene un punto fijo, es decir, existe $C \in Cad(X)$ tal que $g(C) = C$, lo que significa que efectivamente existe en $Cad(X)$ una cadena maximal. Para esto introducimos el concepto de torre

Definición 2.2.1. *Sea $\tau \subseteq Cad(X)$. Diremos que τ es una* ***torre*** *si satisface las siguientes condiciones*
(1) $\varnothing \in \tau$,
(2) *Si* $C \in \tau$ *entonces* $g(C) \in \tau$,
(3) *Si* $\{C_i\}_{i\in I}$ *es una cadena (respecto a* $\subseteq$*) de cadenas en* τ *entonces* $\bigcup_{i\in I} C_i \in \tau$.

La intersección de todas las torres es una torre:

Sea $\mathfrak{G} = \{\tau \subseteq Cad(X) \mid \tau \text{ es una torre}\}$, $\mathfrak{G} \neq \varnothing$ ya que $Cad(X) \in \mathfrak{G}$, es decir, $Cad(X)$ es una torre

(1) Ya hemos mencionado que $\varnothing \in Cad(X)$.
(2) Si $C \in Cad(X)$, entonces, si C es maximal en $Cad(X)$, $g(C) = C$ y así $g(C) \in Cad(X)$ y en el caso en que C no es maximal, $g(C) = C \cup \{f(C)\}$ y por ser C una cadena y $f(C)$, por definición, es comparable con todos los elementos de C, se tiene que $C \cup \{f(C)\}$ es una cadena en X.
Por lo tanto $g(C) = C \cup \{f(C)\} \in Cad(X)$.
(3) Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una cadena de cadenas en $Cad(X)$, $\bigcup_{i\in I} C_i \in Cad(X)$ porque si $a, b \in \bigcup_{i\in I} C_i$, entonces $a \in C_i$ para alguna $i \in I$ y $b \in C_j$ para alguna $j \in I$. Pero como $\{C_i\}_{i\in i}$ es una cadena, $C_i \subseteq C_j$ o $C_j \subseteq C_i$ y por lo tanto $a, b \in C_i$ o $a, b \in C_j$ y debido a que C_k es una cadena en X, entonces $a \leq b$ o $b \leq a$.

Afirmamos que $\tau_o = \bigcap_{\tau\in\mathfrak{G}} \tau$ es una torre:
(i) $\varnothing \in \tau_0$ ya que para todo $\tau \in \mathfrak{G}$, $\varnothing \in \tau$.
(ii) Si $C \in \tau_0$ entonces $g(C) \in \tau$ para todo $\tau \in \mathfrak{G}$ y por lo tanto $g(C) \in \tau_0$.
(iii) Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es una cadena de cadenas en τ_0 entonces para cada $i \in I$ y para cada $\tau \in \mathfrak{G}$, $C_i \in \tau$ y por ser τ una torre entonces $\bigcup_{i\in I} C_i \in \tau$ para cada $\tau \in \mathfrak{G}$. Por lo tanto $\bigcup_{i\in I} C_i \in \tau_0$.

Por definición τ_0 es la mínima torre. Ahora veremos que es una cadena de cadenas, y para esto veremos que el conjunto de los elementos que son comparables con τ_0 coincide con τ_0.

Sea $\tau_1 = \{C \in \tau_0 \mid \text{para todo } C' \in \tau_0,\ C \subseteq C' \text{ ó } C' \subseteq C\}$. τ_1 es una torre
(i) Claramente $\varnothing \in \tau_1$ ya que $\varnothing \subseteq \tau$ para todo $C \in \tau_0$.
(ii) Sea $\{C_i\}_{i\in I}$ una cadena de cadenas en τ_1. Como cada $C_i \in \tau_1$ entonces

dado $C \in \tau_0$, C es comparable con cada uno de ellos, así que puede ocurrir uno de dos casos

(a) Existe $i \in I$ tal que $C \subseteq C_i$,

(b) Para todo $i \in I$, $C_i \subseteq C$.

En el primer caso, como $C_i \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$, entonces $C \subseteq \bigcup_{i\in I} C_i$, y en el segundo caso $\bigcup_{i\in I} C_i \subseteq C$. Por lo tanto $\bigcup_{i\in I} C_i \in \tau_1$.

(iii) Sea $C \in \tau_1$ probaremos que $g(C) \in \tau_1$.

$$\tau_0' = \{D \in \tau_0 \mid D \subseteq C \ \text{ ó } \ g(C) \subseteq D\} \subseteq \tau_0$$

es una torre:

(a') $\varnothing \in \tau_0'$.

(b') Si $\{D_i\}_{i\in I}$ es una cadena de cadenas en τ_0', tenemos dos casos

Existe $i \in I$ tal que $g(C) \subseteq D_i$, o para todo $i \in I$, $D_i \subseteq C$.

En el primer caso $g(C) \subseteq \bigcup_{i\in I} D_i$ y en el segundo $\bigcup_{i\in I} D_i \subseteq C$ por lo que en ambos casos tenemos que $\bigcup_{i\in I} D_i \in \tau_0'$.

(c') Sea $D \in \tau_0'$. Queremos probar que $g(D) \in \tau_0'$.

Como $D \in \tau_0'$ entonces $D \subseteq C$ o $g(C) \subseteq D$.

En el primer caso, si $D = C$, entonces $g(C) = g(D)$ y $g(D) \in \tau_0'$.

Supongamos entonces que $D \subsetneq C$.

Como $D \in \tau_0$ y τ_0 es una torre, se tiene que $g(D) \in \tau_0$, y debido a que $C \in \tau_1$, entonces $g(D) \subseteq C$ o $C \subseteq g(D)$. Si $g(D) \subseteq C$, se tiene que $g(D) \in \tau_0'$ y si $C \subseteq g(D) = D \cup f(D)$, por el hecho de que $D \subset C \subseteq D \cup f(D)$, debe ser que $C = D \cup f(D) = g(D)$ y por lo tanto $g(D) \in \tau_0'$.

En el segundo caso, es decir, $g(C) \subseteq D$, se tiene que $g(C) \subseteq g(D)$ y así $g(D) \in \tau_0'$.

Por lo tanto τ_0' es una torre y por se τ_0 la mínima torre, entonces $\tau_0' = \tau_0$.

Concluimos entonces que $g(C) \in \tau_1$.

Por otro lado por ser τ_1 una torre contenida en τ_0, se debe tener $\tau_1 = \tau_0$ y por lo tanto τ_0 es una cadena de cadenas.

Afirmamos que $\mathfrak{D} = \bigcup_{C\in\tau_0} C$ es una cadena maximal.

Como $\mathfrak{D}$ es una cadena $\mathfrak{D} \subseteq g(\mathfrak{D})$. Por otro lado, como $\mathfrak{D} \in \tau_0$, entonces $g(\mathfrak{D}) \in \tau_0$ y así por la definición de $\mathfrak{D}$, $g(\mathfrak{D}) \subseteq \mathfrak{D}$, por lo que $g(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}$ lo que significa que $\mathfrak{D}$ es maximal.

(**2**) $\Longrightarrow$ (**3**) Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que cada cadena en X tiene cota superior en X. Sea $\mathfrak{C}$ una cadena maximal, cuya existencia está garantizada por hipótesis; y sea $a \in X$ una cota superior de $\mathfrak{C}$.

Afirmamos que a es maximal en X. Si no lo fuera, entonces existiría $d \in X$ tal que $a < d$ y por lo tanto $d \notin \mathfrak{C}$. Entonces $\mathfrak{C} \cup \{d\}$, que contiene propiamente a $\mathfrak{C}$ sería cadena, lo que contradice el hecho de que $\mathfrak{C}$ es una cadena maximal en X.

(**3**) $\Longrightarrow$ (**4**) Sea X un conjunto y consideremos

$$\mathcal{A} = \{(B, \leq_B) \mid B \subseteq X \text{ y } \leq_B \text{ es un buen orden}\}.$$

Definimos en $\mathcal{A}$ la siguiente relación

$$(B, \leq_B) \leq_{\mathcal{A}} (D, \leq_D)$$

si $B \subseteq D$, el orden de D restringido a B coincide con el de B y
si $b \in (D - B)$, entonces $a <_D b$ para todo $a \in D$.

No es difícil demostrar que $\leq_{\mathcal{A}}$ es un orden parcial y queda como ejercicio. Demostraremos que toda cadena en $\mathcal{A}$ tiene cota superior para poder aplicar el Lema de Zorn

Sea $\mathscr{C}$ una cadena en $\mathcal{A}$ y sea

$$\mathcal{F} = \{B \mid \text{existe un buen orden } \leq_B \text{ en } B \text{ tal que } (B, \leq_B) \in \mathscr{C}\}.$$

$\mathcal{F}$ es una cadena respecto a $\subseteq$, debido a la manera en que está definido $\leq_{\mathcal{A}}$. Así pues, dados $a, b \in \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $a, b \in B$.

Veamos que $\mathscr{C}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$. Sea $E = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$ y $\leq_E$ definido en E por $a \leq_E b$ si $a \leq_B b$ para alguna $B \in \mathcal{F}$ y $a, b \in B$. Dejamos como ejercicio demostrar que $\leq_E$ está bien definido, es decir, no depende de B (esto es, se debe demostrar que si para cualquier otro conjunto $C \in \mathcal{F}$, en donde también $a, b \in C$, entonces $a \leq_B b$ si y sólo si $a \leq_C b$) y que $a \leq_E b$ es un orden parcial.

$\leq_E$ es un buen orden

Sea $T \subseteq E$ y $T \neq \varnothing$. Probaremos que T tiene un mínimo. Como $T \neq \varnothing$, entonces existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $T \cap B \neq \varnothing$ y así tenemos que $\varnothing \neq T \cap B \subseteq B$

y como $\leq_B$ es un buen orden entonces $T \cap B$ tiene mínimo t_0. Veremos que t_0 es el mínimo de T.

Sea $t \in T$. Si $t \in B$ entonces $t_0 \leq_B t$ y por lo tanto $t_0 \leq_E t$. En el caso en que $t \notin B$, como $t \in D$ para alguna $D \in F$ entonces debe ser $D \neq B$ y $B \subseteq D$, y ya que $t \in (D - B)$, se tiene que $t_0 <_D t$ y por lo tanto $t_0 <_E t$. Entonces t_0 es el mínimo de T.

Es claro entonces que $(E, \leq_E) \in \mathcal{A}$ y además es una cota superior de $\mathfrak{C}$. Por el Lema de Zorn, $(\mathcal{A}, \leq_{\mathcal{A}})$ tiene un maximal $(M, \leq_M)$. Por último mostraremos que $M = X$.

Supongamos que $M \subset X$ y sea $a \in (X - M)$. Sea $C = M \cup \{a\}$ y $\leq_C$ definido en C por $\leq_C|_M = \leq_M$ y $b <_C a$ para todo $b \in M$. Se puede verificar fácilmente que $\leq_C$ es un buen orden sobre C, así que $(C, \leq_C) \in \mathcal{A}$. Además como $M \subset C$ entonces $(M, \leq_M) < (C, \leq_C)$, lo que es un absurdo. Por lo tanto $M = X$ y $\leq_M$ es un buen orden sobre X.

$(\mathbf{4}) \Longrightarrow (\mathbf{1})$ Sea $\mathfrak{C}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos, y sea E la unión de todos los conjuntos de $\mathfrak{C}$. Por hipótesis E acepta un buen orden $\leq$. Para cada $C \in \mathfrak{C}$, sea x_C el elemento mínimo de C. Definimos $f : \mathfrak{C} \longrightarrow E$ por $f(C) = x_C$. f satisface entonces que $f(C) \in C$. ■

§ 2.3 Ejercicios

2.1. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Para cada $j \in I$, definimos $p_j : \underset{i\in I}{\times} A_i \longrightarrow A_j$ por $p_j\left((a_i)_{i\in I}\right) = a_j$. Demostrar que p_j es suprayectiva.

2.2. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y B un conjunto arbitrario. Sea para cada $i \in I$, $f_i : B \longrightarrow A_i$ una función. Demostrar que existe una única función $F : B \longrightarrow \underset{i\in I}{\times} A_i$ tal que $p_j \circ F = f_j$, donde p_j está definida como en el Ejercicio 2.1.

2.3. Demostrar el inverso del Ejercicio 2.2. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y X un conjunto junto con una familia de funciones $p_i : X \longrightarrow A_i$ que satisfacen que dado cualquier conjunto B y una familia de funciones $f_i : B \longrightarrow A_i$ con $i \in I$, existe una única función $F : B \longrightarrow X$ tal que $p_j \circ F = f_i$. Demostrar que existe una biyección entre X y $\underset{i\in I}{\times} A_i$

2.4. Demuestra que son equivalentes
(1) **Axioma de Elección.** Para cada familia $\mathcal{C}$ no vacía de conjuntos no vacíos existe una función $f : \mathcal{C} \longrightarrow \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$ tal que $f(C) \in C$.
(2) Dada una familia no vacía $\{A_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos y ajenos dos a dos, existe un conjunto cuya intersección con cada miembro de la familia es un unitario.

2.5. Con la notación de la página 31 demuestra que
$Comp(C) - C \neq \varnothing$ si y sólo si C no es una cadena maximal.

2.6. Sea X un conjunto y considera

$$\mathcal{A} = \{(B, \leq_B) \mid B \subseteq X \text{ y } \leq_B \text{ es un buen orden}\}.$$

Demuestra que el orden definido para $\mathcal{A}$ en la página 34, es un orden parcial.

2.7. Con la notación del ejercicio anterior, sea $\mathfrak{C}$ una cadena en $\mathcal{A}$ y sea

$$F = \{B \mid \text{existe un buen orden } \leq_B \text{ en } B \text{ tal que } (B, \leq_B) \in \mathfrak{C}\}.$$

Toma $E = \bigcup_{B\in F} B$ y $\leq_E$ definido en E por $a \leq_E b$ si $a \leq_B b$ para alguna $B \in F$ y $a, b \in B$. Demuestra que $\leq_E$ está bien definido (ver página 34).

Capítulo 3

Números cardinales

§ 3.1 Cardinales

En este capítulo estableceremos una relación binaria entre conjuntos, llamada *equipotencia*, que intenta reflejar cuándo dos conjuntos "tienen la misma cantidad de elementos". Esta idea corresponde a lo siguiente: dos conjuntos son equipotentes si se puede establecer una correspondencia uno a uno entre los dos conjuntos. El concepto de equipotencia entre dos conjuntos se define rigurosamente y no debe ser confundida con la idea intuitiva de "tener la misma cantidad de elementos". Por ejemplo, podríamos decir que $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, tiene más elementos que $\mathbb{N}$, el conjunto de los números naturales, ya que $\mathbb{N}$ es un subconjunto propio de $\mathbb{Z}$. Sin embargo sabemos que podemos establecer una función biyectiva entre estos dos conjuntos y por lo tanto son equipotentes. Por lo anterior nunca utilizaremos las frases "tiene más elementos que ..."o " tiene la misma cantidad de elementos que ...", puesto que esto puede conducir a malas interpretaciones desde el punto de vista intuitivo.

Definición 3.1.1. *Dos conjuntos A y B son* ***equipotentes*** *si existe una función biyectiva de A en B.*

Notación 3.4. Si A y B son equipotentes, lo expresaremos como $A \sim B$.

***Proposición* 3.1.1.** *La relación $\sim$ entre conjuntos definida arriba tiene las siguientes propiedades*
(1) *$A \sim A$ para cualquier conjunto A,*
(2) *si $A \sim B$ entonces $B \sim A$,*
(3) *si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$.*

Demostración.

(1) $1_A : A \to A$, la función identidad es biyectiva.
(2) Si $f : A \to B$ es biyectiva entonces $f^{-1} : B \to A$ es biyectiva.
(3) Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son biyectivas, entonces $g \circ f : A \to C$ es biyectiva. ■

Nota 7. Aún cuando la clase de todos los conjuntos no es un conjunto, la relación de equipotencia, restringida a una familia (conjunto) de conjuntos, es una relación de equivalencia en dicha familia (Proposición 3.1.1) y por lo tanto, ésta induce una partición en clases de equivalencia, donde cada clase de equivalencia consta de los conjuntos de la familia que son equipotentes entre sí.

En realidad no definiremos el concepto de *número cardinal*, sino cuándo dos conjuntos tienen la misma cardinalidad. En la Teoría de Conjuntos existe una manera formal de definir número cardinal, que por el enfoque que se le ha dado a este libro no lo discutiremos aquí, pero que sí mencionamos en la sección 4.4 del capítulo 4 del libro. Sin embargo presentamos a continuación cómo *A. Tarski* introdujo los números cardinales mediante dos axiomas

1. *Cada conjunto está asociado con un objeto, el cual es su* ***número cardinal****.*
2. *Dos conjuntos son equivalentes (equipotentes) si y sólo si tienen el mismo número cardinal.*

Si denotamos por $|A|$, al número cardinal de A, de esta manera, dos conjuntos son equipotentes si y sólo si **tienen el mismo número cardinal** o **tienen la misma cardinalidad**, es decir, A es equipotente a B si y sólo si $|A| = |B|$.

Existe un método para escoger un representante en cada clase de equipotencia y desde este punto de vista éste sería el cardinal asociado a la clase.

Ejemplo 3.1.1.
(a) $|\varnothing| = |A|$ si y sólo si $A = \varnothing$. Denotamos $|\varnothing| = 0$
(b) $|\{x\}| = |A|$ si y sólo si A consta de un solo elemento. Denotaremos $1 = |\{x\}|$.
(c) Si A y B constan ambos de un único elemento y $A \cap B = \varnothing$ entonces $|A \cup B| = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$. Denotaremos $2 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}|$

Definiremos ahora un **orden sobre los cardinales**.

Definición 3.1.2. *Sean A y B conjuntos. Diremos que $|A|$ es* menor o igual *que $|B|$ ($|A| \leq |B|$) si existe una función inyectiva de A en B.*

Demostraremos no sólo que $\leq$ es un orden parcial sino que es total. Para esto empecemos demostrando que esta definición es correcta, es decir, que no depende de los representantes

***Proposición* 3.1.2.** *Sean A_1, A_2, B_1, B_2 conjuntos tales que $|A_1| = |A_2|$, $|B_1| = |B_2|$. Entonces $|A_1| \leq |B_1|$ si y sólo si $|A_2| \leq |B_2|$.*

Demostración. Sean $f : A_1 \longrightarrow A_2$ y $g : B_1 \longrightarrow B_2$ funciones biyectivas (las cuales existen por hipótesis) y supongamos que $|A_1| \leq |B_1|$. Entonces existe una función inyectiva $h : A_1 \longrightarrow B_1$. La función

$$g \circ h \circ f^{-1} : A_2 \longrightarrow B_2$$

es inyectiva y por lo tanto $|A_2| \leq |B_2|$. Análogamente se prueba la otra implicación. ■

***Proposición* 3.1.3.** *La relación $\leq$ satisface*
(1) *$|A| \leq |A|$ para cualquier conjunto A.*
(2) *Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$ entonces $|A| \leq |C|$.*

Demostración.
(1) La función identidad $1_A : A \longrightarrow A$ es inyectiva.
(2) Si $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f : A \longrightarrow C$ es una función inyectiva. ■

Si la propiedad antisimétrica fuera válida para $\leq$, es decir, $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$ implica $|A| = |B|$, tendríamos definido un orden parcial sobre los cardinales. En realidad es así, como lo muestra el siguiente teorema

***Teorema* 3.1.4.** *(**Schröder-Bernstein**) Si A y B son conjuntos tales que $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A|$, entonces $|A| = |B|$.*

Demostración. Por hipótesis sabemos que existen funciones inyectivas $\varphi : A \longrightarrow B$ y $\psi : B \longrightarrow A$. Si alguna de ellas es biyectiva terminamos aquí. Así que supongamos que ninguna de las dos es biyectiva.

Construiremos, a partir de φ y ψ la función deseada.

Sea $\Omega = \{X \subseteq A \mid (A - \psi(B - \varphi(X))) \subseteq X\}$. Ω tiene las siguientes propiedades:
(1) $\Omega \neq \varnothing$ ya que $A \in \Omega$
(2) Si $X \in \Omega$, entonces $[A - \psi(B - \varphi(X))] \in \Omega$.

Como $X \in \Omega$ entonces $A - \psi(B - \varphi(X)) \subseteq X$ y aplicando φ obtenemos que $\varphi[A - \psi(B - \varphi(X))] \subseteq \varphi(X)$.

Tomando complementos respecto a B tenemos

$$B - \varphi[A - \psi(B - \varphi(X))] \supseteq B - \varphi(X).$$

Aplicando ψ, $\psi(B-\varphi[A-\psi(B-\varphi(X))]) \supseteq \psi(B-\varphi(X))$. Y por último, tomando complementos respecto a A, obtenemos

$$A - \psi(B - \varphi[A - \psi(B - \varphi(X))]) \subseteq A - \psi(B - \varphi(X))$$

y por lo tanto $[A - \psi(B - \varphi(X))] \in \Omega$.

Consideremos ahora la intersección de todos los conjuntos que pertenecen a Ω, es decir, sea

$$X_0 = \bigcap_{X \in \Omega} X.$$

Tenemos que $X_0 \in \Omega$, ya que para cada $X \in \Omega$

$$\begin{gathered} X_0 \subseteq X \\ \varphi(X_0) \subseteq \varphi(X) \\ B - \varphi(X_0) \supseteq B - \varphi(X) \\ \psi(B - \varphi(X_0)) \supseteq \psi(B - \varphi(X)) \\ A - \psi(B - \varphi(X_0)) \subseteq A - \psi(B - \varphi(X)) \subseteq X. \end{gathered}$$

Hemos probado que para cada $X \in \Omega$, $A - \psi(B - \varphi(X_0)) \subseteq X$. Por lo tanto $A - \psi(B - \varphi(X_0)) \subseteq X_0$ y así $X_0 \in \Omega$.

Por otro lado, como $A - \psi(B - \varphi(X_0)) \in \Omega$, entonces

$$X_0 \subseteq A - \psi(B - \varphi(X_0))$$

y así

$$A - \psi(B - \varphi(X_0)) \subseteq X_0 \subseteq A - \psi(B - \varphi(X_0)).$$

Por lo tanto $A - \psi(B - \varphi(X_0)) = X_0$, es decir

$$\psi(B - \varphi(X_0)) = A - X_0.$$

Definimos ahora una biyección de A en B de la siguiente manera

$$f(a) = \begin{cases} \varphi(a) & \text{si } a \in X_0 \\ \\ \psi^{-1}(a) & \text{si } a \in A - X_0, \end{cases}$$

donde

$$A - X_0 \xrightarrow{\psi^{-1}} B - \varphi(X_0)$$

y

$$X_0 \xrightarrow{\varphi|_{X_0}} \varphi(X_0)\ .$$

Claramente f está bien definida ya que $X_0 \cap (A - X_0) = \varnothing$. Además como $A - X_0 \subseteq Im(\psi)$, para cada $a \in A - X_0$ existe una única $b \in B$ (esto por ser ψ inyectiva) tal que $\psi(b) = a$.

Además f es inyectiva ya que φ y ψ^{-1} lo son y no existen un $a \in X_0$ y $a' \in A - X_0$ tales que $\varphi(a) = \psi^{-1}(a')$ pues se tiene que

$$\psi^{-1}(A - X_0) = B - \varphi(X_0) \text{ y } [B - \varphi(X_0)] \cap \varphi(X_0) = \varnothing.$$

Por último veamos que f es suprayectiva. Si $b \in B$, entonces $b \in \varphi(X_0)$ o $b \in B - \varphi(X_0)$.

1°/ Si $b \in \varphi(X_0)$, entonces $b = \varphi(a)$ para alguna $a \in X_0$. Por la definición de f, $f(a) = \varphi(a)$ y por lo tanto $b = f(a)$.

2°/ Si $b \in B - \varphi(X_0)$, entonces $\psi(b) \in \psi(B - \varphi(X_0)) = A - X_0$ y nuevamente por la definición de f, $f(\psi(b)) = \psi^{-1}(\psi(b)) = b$.

Como en ambos casos $b \in Im(f)$, concluimos que f es suprayectiva, y por lo tanto biyectiva, por lo que $|A| = |B|$. ■

***Corolario* 3.1.5.** *La relación $\leq$ definida sobre los cardinales es un orden parcial.*

Demostración. Es una consecuencia de la Proposición 3.1.3 y el Teorema 3.1.4. ■

***Teorema* 3.1.6.** *El orden parcial $\leq$ definido sobre cardinales es un Buen Orden.*

Demostración. (Hönig [**Hö**])

Sea Ω un conjunto no vacío de cardinales y para cada $\alpha \in \Omega$ sea A_α tal que $|A_\alpha| = \alpha$. Sea $A = \underset{\alpha\in\Omega}{\times} A_\alpha$ el producto cartesiano de los conjuntos A_α.

Recordemos que cada elemento de A lo denotamos por $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ donde $a_\alpha \in A_\alpha$. Sea Ω_0 la familia de todos los subconjuntos B de A que tiene la propiedad de que dos elementos distintos de B tienen sus correspondientes coordenadas distintas, es decir, es verdadera

$$(*) \qquad B \in \Omega_0 \iff$$

$$(\forall (x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in B\ \forall (y_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in B\ ((x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \neq (y_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \Rightarrow \forall\ \alpha \in \Omega\ x_\alpha \neq y_\alpha)).$$

Consideremos ahora la familia Ω_0 con el orden parcial de la inclusión.

Afirmamos que $(\Omega_0, \subseteq)$ satisface la hipótesis del Lema de Zorn.

Si $\mathcal{L} \subseteq \Omega_0$ es una cadena en $(\Omega_0, \subseteq)$, entonces $B_0 = \cup\{S \mid S \in \mathcal{L}\}$ pertenece a Ω_0, ya que si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \neq (y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ son elementos de B_0, entonces

existen $B, B' \in \mathcal{L}$ tales que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in B$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in B'$, y como $\mathcal{L}$ es una cadena se tiene $B \subseteq B'$ o $B \supseteq B'$, así que $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ y $(y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ pertenecen ambos al mismo conjunto de $\mathcal{L}$ y como este conjunto satisface $(*)$, entonces para cada $\alpha \in \Omega$, $x_\alpha \neq y_\alpha$.

Por otro lado, para cada $B \in \mathcal{L}$, $B \subseteq B_0$ por lo que B_0 es cota superior de $\mathcal{L}$. Por lo tanto, por el Lema de Zorn, existe un maximal $\overline{B}$ en Ω_0 y esto significa que $\overline{B} \subseteq A$ y si $\overline{B} \subsetneq C \subseteq A$, entonces C no tiene la propiedad $(*)$. Consideremos ahora la proyección $p_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha$, $p_\alpha((a_\beta)_{\beta\in\Omega}) = a_\alpha$.

Afirmamos que existe un cardinal $\beta \in \Omega$ tal que $(p_\beta|_{\overline{B}})(\overline{B}) = A_\beta$. Si esta afirmación no fuera verdadera, entonces tendríamos que para toda $\alpha \in \Omega$ $p_\alpha(\overline{B}) \subsetneq A_\alpha$ y entonces $A_\alpha - p_\alpha(\overline{B}) \neq \varnothing$. Por el Axioma de Elección, podemos tomar, para cada $\alpha \in \Omega$, $a_\alpha \in A_\alpha - p_\alpha(\overline{B})$. Entonces $(a_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in A$ y este elemento tiene la propiedad de que para cada $(x_\beta)_{\beta\in\Omega} \in \overline{B}$, $x_\alpha \neq a_\alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$.

Esto nos dice que $\overline{B} \cup \{(a_\beta)_{\beta\in\Omega})\}$ satisface la condición $(*)$, y además contiene propiamente a $\overline{B}$, lo que es imposible pues $\overline{B}$ es maximal con esta propiedad. Por lo tanto para alguna $\beta \in \Omega$ se debe tener $(p_\beta|_{\overline{B}})(\overline{B}) = A_\beta$. Afirmamos que esta β es elemento mínimo de Ω, es decir $\beta \leq \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega$.

Veremos que para cada $\gamma \in \Omega$ existe una función inyectiva $f : A_\beta \longrightarrow A_\gamma$.

Sea $a_\beta \in A_\beta$. Como $(p_\beta|_{\overline{B}})(\overline{B}) = A_\beta$, entonces existe $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \in \overline{B}$ tal que $p_\beta((x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}) = a_\beta$, es decir, la β-ésima coordenada de $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es a_β. Además este elemento $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ es único ya que pertenece a $\overline{B}$, por lo que si coincide con otro elemento de $\overline{B}$ en la β-ésima coordenada entonces estos elementos son iguales porque $\overline{B}$ satisface la condición $(*)$. Esto significa que $(p_\beta|_{\overline{B}})^{-1} : A_\beta \longrightarrow \overline{B}$ es inyectiva.

Por otro lado, para cada $\alpha \in \Omega$, $p_\alpha|_{\overline{B}} : \overline{B} \longrightarrow A_\alpha$ es inyectiva, pues si $(x_\alpha)_{\alpha\in\Omega} \neq (y_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ entonces, como pertenecen a $\overline{B}$, se tiene que $x_\alpha \neq y_\alpha$ para toda $\alpha \in \Omega$ y así $(p_\alpha|_{\overline{B}})((x_\alpha)_{\alpha\in\Omega}) \neq (p_\alpha|_{\overline{B}})((y_\alpha)_{\alpha\in\Omega})$

Por lo tanto la función $f = (p_\gamma|_{\overline{B}}) \circ (p_\beta|_{\overline{B}})^{-1} : A_\beta \longrightarrow A_\gamma$ es inyectiva y así $\beta \leq \gamma$ para cada $\gamma \in \Omega$. ■

***Corolario* 3.1.7.** *El orden parcial $\leq$ definido sobre los cardinales es total.*

Nota 8. Sean A y B conjuntos. $|A| < |B|$ si y sólo si existe una función inyectiva de A en B, pero no existe una función suprayectiva de A en B. La primera afirmación, la existencia de una función inyectiva, es por la definición de $\leq$ y la segunda es debido a que si existiera una función suprayectiva de A en B, entonces cualquier inverso derecho de la función

sería una función inyectiva de B en A, lo que implicaría que $|B| \leq |A|$, y por lo tanto por el Teorema de Schröder-Berstein, se debería tener $|A| = |B|$, que no es el caso.

En el siguiente teorema, debido a Cantor, veremos que dado un cardinal siempre existe uno mayor, es decir, no existe un cardinal máximo.

***Teorema* 3.1.8.** *(Teorema de Cantor)*
Dado un conjunto A, se tiene que $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

Demostración. Evidentemente la función $g : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ definida por $g(a) = \{a\}$ es inyectiva. Ahora sea $f : A \longrightarrow \mathscr{P}(A)$ cualquier función. Veremos que f no puede ser suprayectiva.

Sea $A_0 = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Afirmamos que A_0 no pertenece al rango de f. Supongamos lo contrario, es decir, que para alguna $x \in A$, $f(x) = A_0$.

Existen dos posibilidades
1°/ Si $x \in A_0$, por definición de A_0, entonces $x \notin f(x) = A_0$. Por lo tanto $x \in A_0$ y $x \notin A_0$, ¡absurdo!
2°/ Si $x \notin A_0$, entonces $x \in f(x) = A_0$. Por lo tanto $x \in A_0$ y $x \notin A_0$, ¡absurdo!

En ambos casos llegamos a un absurdo y así, A_0 no pertenece al rango de f y por lo tanto f no es suprayectiva. ■

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Se dice que la unión $\bigcup_{i\in I} A_i$ es **ajena** si para cualesquiera $i, j \in I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $A_i \neq A_j$, y lo denotamos por $\bigdot{\bigcup}_{i\in I} A_i$.

***Proposición* 3.1.9.** *Dada una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$, existe una familia de conjuntos $\{B_i\}_{i\in I}$ tal que para cualesquiera $i, j \in I$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y $|B_i| = |A_i|$ para toda $i \in I$.*

Demostración. Definimos $B_i = A_i \times \{i\}$.

Entonces para $i, j \in I$ con $i \neq j$ $B_i \cap B_j = \varnothing$ y $|B_i| = |A_i|$ para cada $i \in I$, ya que la función $f_i : A_i \longrightarrow A_i \times \{i\} = B_i$ dada por $f_i(a) = (a, i)$ es biyectiva. ■

Nota 9. Al proceso de la Proposición 3.1.9 lo llamamos hacer la unión de la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ una unión ajena, y como hemos dicho, la denotamos

por $\overset{\bullet}{\bigcup_{i\in I}} A_i$. Por ejemplo, $A \overset{\bullet}{\cup} A'$ denota la unión de dos conjuntos B y B' donde $B \cap B' = \varnothing$ y $|A| = |B|$ y $|A'| = |B'|$.

En general $\overset{\bullet}{\bigcup_{i\in I}} A_i$ denota la unión de una familia de conjuntos (no importa quienes sean estos conjuntos) $\{B_i\}_{i\in I}$ donde $B_i \cap B_j = \varnothing$ para $i \neq j$ con $i, j \in I$ y $|A_i| = |B_i|$.

Como se verá más adelante, para nuestro propósito no existe problema alguno en la elección de la familia $\{B_i\}_{i\in I}$ pues lo que nos interesa no son en sí los conjuntos B_i, sino la propiedad que tienen de ser ajenos dos a dos y de que $|B_i| = |A_i|$ para todo $i \in I$.

Como justificación de la nota anterior tenemos

***Lema* 3.1.10.** *Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ familias de conjuntos tales que para $i \neq j$ en I, $A_i \cap A_j = \varnothing = B_i \cap B_j$, y para cada $i \in I$, $|A_i| = |B_i|$. Entonces $|\bigcup_{i\in I} A_i| = |\bigcup_{i\in I} B_i|$.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ biyectiva. Definimos $f : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i$ como $f(x) = f_i(x)$ si $x \in A_i$. f está bien definida ya que $\bigcup_{i\in I} A_i$ es una unión ajena. Además f es biyectiva pues cada f_i lo es y $\bigcup_{i\in I} B_i$ es una unión ajena. ■

§ 3.2 Operaciones entre cardinales

Definiremos ahora la suma de números cardinales.

Definición 3.2.1. *Sean α y β cardinales, A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. La **suma de los cardinales** α y β es*

$$\alpha + \beta = |A \overset{\bullet}{\cup} B|.$$

Como siempre, comprobaremos que la suma está bien definida.

***Proposición* 3.2.1.** *La suma de cardinales no depende del representante tomando en cada una de las clases, es decir, si $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$ entonces $|A \overset{\bullet}{\cup} B| = |A' \overset{\bullet}{\cup} B'|$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del Lema 3.1.10. ■

***Proposición* 3.2.2.** *Sean α, β y γ cardinales. Entonces*
(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.
(3) $\alpha + 0 = \alpha$.

Demostración. Sean A, B y C conjuntos tales que $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ y $\gamma = |C|$. Los resultados de la proposición se obtienen de lo siguiente
(1) $A \overset{\bullet}{\cup} B = B \overset{\bullet}{\cup} A$.
(2) $(A \overset{\bullet}{\cup} B) \overset{\bullet}{\cup} C = A \overset{\bullet}{\cup} (B \overset{\bullet}{\cup} C)$.
(3) $A \overset{\bullet}{\cup} \varnothing = A$. ■

***Proposición* 3.2.3.** *Sean α y β cardinales. Si $\alpha \leq \beta$, entonces*
(1) *Existe un cardinal γ tal que $\beta = \alpha + \gamma$.*
(2) *$\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$ para cualquier cardinal γ.*

Demostración.
(1) Sean A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$, y sea $f : A \longrightarrow B$ una función inyectiva. Si A'=$Im(f)$, entonces $B = A' \overset{\bullet}{\cup} (B - A')$ y por lo tanto $|B| = |A| + |B - A'|$. Así que $\gamma = |B - A'|$ es el cardinal deseado.

(2) Sean A, B y C conjuntos, ajenos dos a dos, tales que $\alpha = |A|$, $\beta = |B|$ y $\gamma = |C|$. Como $\alpha \leq \beta$ entonces existe una función $f : A \longrightarrow B$ que es inyectiva.

La función $h : A \overset{\bullet}{\cup} C \longrightarrow B \overset{\bullet}{\cup} C$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \\ x & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

Es una función inyectiva (verificarlo) y por lo tanto, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. ■

Hemos definido la suma de cardinales en forma binaria. Sin embargo podemos definir la suma arbitraria de cardinales, generalizando la anterior definición.

Sea I un conjunto arbitrario (de índices), φ una función que asocia a cada $i \in I$ un cardinal $\alpha_i = \varphi(i)$. Denotamos esta función como $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ y la llamaremos una familia de cardinales.

Definición 3. 2.2. *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $i \in I$, sea $\alpha_i = |A_i|$. Definimos $\sum_{i \in I} \alpha_i = |\overset{\bullet}{\bigcup_{i \in I}} A_i|$.*

Esta definición está bien justificada debido al Lema 3.1.10.

Nota 10. Cuando $I = \{i, k\}$ la Definición 3.2.2 coincide con la Definición 3.2.1.

***Proposición* 3.2.4.** *Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos.*
(1) *Si $\sigma : I \longrightarrow I$ es una función biyectiva, entonces* $\sum_{i\in I} |A_i| = \sum_{i\in I} |A_{\sigma(i)}|$,
(2) *Si $\{I_k\}_{k\in K}$ es una partición de I, entonces* $\sum_{i\in I} |A_i| = \sum_{k\in K} (\sum_{i\in I_k} |A_i|)$,
(3) *Sean $\{B_j\}_{j\in J}$ una familia de conjuntos, J' un conjunto ajeno a $I \cup J$, $|J'| = |J|$ y sea $\tau : J' \longrightarrow J$ una función biyectiva. Sea, para cada $j \in J'$, $B'_j = B_{\tau(j)}$. Entonces*

$$\sum_{i\in I} |A_i| + \sum_{j\in J} |B_j| = \sum_{k\in I\cup J'} |C_k|, \text{ donde } C_k = \begin{cases} A_k & \text{si } k \in I \\ \\ B'_k & \text{si } k \in J'. \end{cases}$$

Demostración. Los resultados se obtienen de
(1) $\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i = \dot{\bigcup_{i\in I}} A_{\sigma(i)}$.
(2) $\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i = \dot{\bigcup_{k\in K}} (\dot{\bigcup_{i\in I_k}} A_i)$.
(3) Si $I \cap J = \varnothing$, $(\dot{\bigcup_{i\in I}} A_i) \cup (\dot{\bigcup_{j\in J}} B_j) = \dot{\bigcup_{k\in I\cup J}} C_k$ donde

$$C_k = \begin{cases} A_k & \text{si } k \in I \\ \\ B_k & \text{si } k \in J. \end{cases}$$ ■

Ejemplo 3.2.1. Si para cada $i \in I$ $A_i = \{\varnothing\}$, entonces $\sum_{i\in I} |A_i| = |I|$.

Definamos ahora el producto de cardinales.

Definición 3.2.3. *Sean α y β cardinales, A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. El producto de α y β es*

$$\alpha \cdot \beta = |A \times B|.$$

***Proposición* 3.2.5.** *El producto de cardinales no depende de los conjuntos escogidos A y B.*

Demostración. Sean A, A', B y B' conjuntos tales que $|A| = |A'|$ y $|B| = |B'|$, es decir, existen funciones biyectivas $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$. La función $F : A \times B \longrightarrow A' \times B'$ definida por $F((x, y)) = (f(x), g(y))$ es biyectiva y por lo tanto $|A \times B| = |A' \times B'|$. ■

Ejemplo 3.2.2. Recordemos que $0 = |\varnothing|$, $1 = |\{x\}|$, $2 = |\{x, y\}|$ con $x \neq y$. Sea α un cardinal cualquiera y A un conjunto tal que $\alpha = |A|$.
(*a*) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$, ya que $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.
(*b*) $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$, ya que $|A \times \{x\}| = |\{x\} \times A| = |A|$.
(*c*) $2\alpha = \alpha + \alpha$. Si $B = \{b, b'\}$con $b \neq b'$, entonces

$$\begin{aligned} 2\alpha &= |B| \cdot |A| \\ &= |B \times A| \\ &= |(\{b\} \times A) \overset{\bullet}{\cup} (\{b'\} \times A)| \\ &= |\{b\} \times A| + |\{b'\} \times A| \\ &= |A| + |A| \\ &= \alpha + \alpha. \end{aligned}$$

Observe que como $b \neq b'$, $(\{b\} \times A) \cap (\{b'\} \times A) = \varnothing$.

El producto de cardinales tiene las siguiente propiedades.

***Proposición* 3.2.6.** *Sean α, β y γ cardinales. Entonces*
(1) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
(2) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
(3) $\alpha \cdot 1 = \alpha$.
(4) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
(5) $\alpha \cdot (\sum\limits_{j \in J} \beta_j) = \sum\limits_{j \in J} \alpha \cdot \beta_j$.

Demostración. Estos resultados se obtienen de
(1) $A \times B \sim B \times A$.
(2) $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.
(3) $A \times \{b\} \sim A$.
(4) $A \times (B \overset{\bullet}{\cup} C) \sim (A \times B) \overset{\bullet}{\cup} (A \times C)$.
(5) $A \times (\overset{\bullet}{\bigcup\limits_{i \in I}} A_i) \sim \overset{\bullet}{\bigcup\limits_{i \in I}} (A \times A_i)$. ■

Análogamente como se hizo para la suma, podemos definir el producto arbitrario de cardinales.

Definición 3.2.4. *Sea $(\alpha_i)_{i \in I}$ una familia de cardinales y $\{A_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos tales que para cada $i \in I$, $\alpha_i = |A_i|$. El producto de los cardinales α_i, denotado por $\prod\limits_{i \in I} \alpha_i$, es el cardinal del producto cartesiano de $\{A_i\}_{i \in I}$, es decir,*

$$\prod_{i \in I} \alpha_i = |\underset{i \in I}{\times} A_i|.$$

***Proposición* 3.2.7.** *Si para cada $i \in I$, A_i y A'_i son conjuntos tales que $|A_i| = |A'_i|$, entonces $|\underset{i\in I}{\times} A_i| = |\underset{i\in I}{\times} A'_i|$, es decir, el producto de cardinales está bien definido.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $f_i : A_i \longrightarrow A'_i$ biyectiva. La función $F : |\underset{i\in I}{\times} A_i| \longrightarrow |\underset{i\in I}{\times} A'_i|$ dada por $F((a_i)_{i\in I}) = (f_i(a_i))_{i\in I}$ es una función biyectiva. ■

***Proposición* 3.2.8.** *Sean $(\alpha_i)_{i\in I}$ y $(\beta_j)_{j\in J}$ dos familias de cardinales y sea α un cardinal fijo.*
(1) *Si $\sigma : I \longrightarrow I$ es una función biyectiva, entonces $\prod_{i\in I} \alpha_i = \prod_{i\in I} \alpha_{\sigma(i)}$,*
(2) *Si $\{I_k\}_{k\in K}$ es una partición de I, entonces $\prod_{i\in I} \alpha_i = \prod_{k\in K} (\prod_{i\in I_k} \alpha_i)$,*
(3) *Si $\sigma : I' \longrightarrow I$ y $\tau : J' \longrightarrow J$ son funciones biyectivas con $I' \cap J' = \varnothing$, entonces*

$$\left(\prod_{i\in I} \alpha_i\right) \cdot \left(\prod_{j\in J} \beta_j\right) = \prod_{k\in I'\cup J'} \gamma_k, \quad \textit{donde} \quad \gamma_k = \begin{cases} \alpha_{\sigma(k)} & \textit{si } k \in I' \\ \beta_{\tau(k)} & \textit{si } k \in J', \end{cases}$$

(4) $\alpha \cdot \left(\sum_{j\in J} \beta_j\right) = \sum_{j\in J} (\alpha \cdot \beta_j)$.

Demostración. Sean, para cada $i \in I$ y $j \in J$, $\alpha_i = |A_i|$ y $\beta_j = |B_j|$ y sea $\alpha = |A|$. En cada uno de los incisos la función dada es biyectiva.
(1) $f : \underset{i\in I}{\times} A_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\times} A_{\sigma(i)}$, dada por $f((a_i)_{i\in I}) = (a_{\sigma(i)})_{i\in I}$.
(2) $f : \underset{i\in I}{\times} A_i \longrightarrow \underset{k\in K}{\times} (\underset{i\in I_k}{\times} A_i)$, dada por $f((a_i)_{i\in I}) = ((a_i)_{i\in I_k})_{k\in K}$.
(3) $f : (\underset{i\in I}{\times} A_i) \times (\underset{j\in J}{\times} B_j) \longrightarrow \underset{k\in I'\cup J'}{\times} C_k$, donde $C_k = \begin{cases} A_{\sigma(k)} \text{ si } k \in I' \\ B_{\tau(k)} \text{ si } k \in J' \end{cases}$
(4) $f : A \times (\overset{\bullet}{\bigcup}_{j\in J} B_j) \longrightarrow \overset{\bullet}{\bigcup}_{j\in J} (A \times B_j)$, $f((a,b)) = (a,b)$. ■

Definición 3.2.5. *Sean A y B conjuntos. Definimos el conjunto A^B como*

$$A^B = \{f : B \longrightarrow A \mid f \textit{ es función}\}.$$

Ejemplo 3.2.3. Para cada conjunto A se tiene
(a) $A^{\varnothing} \sim \{\varnothing\}$.
(b) $A^{\{x\}} \sim A$.
(c) $A^{\{x,y\}} \sim A \times A$.

Definiremos ahora, para cada par de cardinales α y β, la potencia α^β.

Definición 3. 2.6. *Sean α y β cardinales, A y B conjuntos tales que $\alpha = |A|$ y $\beta = |B|$. Definimos $\alpha^\beta = |A^B|$.*

***Proposición* 3.2.9.** *Sea A, B, A' y B' conjuntos tales que $|A| = |A'|$, y $|B| = |B'|$. Entonces $|A^B| = |(A')^{B'}|$.*

Demostración. Sean $f : A \longrightarrow A'$ y $g : B \longrightarrow B'$ funciones biyectivas. Entonces la función $H : A^B \longrightarrow (A')^{B'}$ dada por $H(h) = f \circ h \circ g^{-1}$ es biyectiva ya que
1°/ Si $f \circ h \circ g^{-1} = f \circ h' \circ g^{-1}$ entonces, por ser f y g biyectivas, $h = h'$.
2°/ Si $q \in (A')^{B'}$, entonces la función $f^{-1} \circ q \circ g$ es tal que

$$H(f^{-1} \circ q \circ g) = f \circ (f^{-1} \circ q \circ g) \circ g^{-1} = 1_A \circ q \circ 1_B = q.$$

De 1°/ y 2°/ tenemos entonces que $|A^B| = |(A')^{B'}|$. ■

Observación 3.2. Con respecto al Ejemplo 3.2.3, tenemos que
(1) $\alpha^0 = 1$.
(2) $\alpha^1 = \alpha$.
(3) $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$.

***Proposición* 3.2.10.** *Sean α, β y γ cardinales. Entonces*
(1) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.
(2) *Si $(\beta_i)_{i\in I}$ es una familia de cardinales entonces* $\prod_{i\in I} \alpha^{\beta_i} = \alpha^{\sum_{i\in I} \beta_i}$.
(3) *Si $|I| = \beta$ entonces* $\alpha^\beta = \prod_{i\in I} \alpha_i$, *en donde $\alpha_i = \alpha$ para cada $i \in I$.*

Demostración.
(1) Sean A, B y C conjuntos ajenos dos a dos tales que $\alpha = |A|, \beta = |B|$ y $\gamma = |C|$. La función

$$F : \{f : C \to A^B\} \longrightarrow \{f : B \times C \to A\}$$

definida por $F(f)(b, c) = (f(c))(b)$ es biyectiva (demuéstrelo).

(2) Sean, para cada $i \in I$, $\beta_i = |B_i|$ y $\alpha = |A|$, donde los conjuntos B_i son ajenos dos a dos. La función

$$G : \underset{i\in I}{\times} A^{B_i} \longrightarrow A^{(\bigcup_{i\in I} B_i)}$$

definida por $G((f_i)_{i\in I})(x) = f_i(x)$, donde $f_i : B_i \longrightarrow A$ y $x \in B_i$, es biyectiva.

(3) Sea A un conjunto tal que $|A| = \alpha$. La función

$$H : A^I \longrightarrow \underset{i\in I}{\times} A_i, \text{ donde } A_i = A \text{ para cada } i \in I,$$

dada por $H(f) = (f(i))_{i\in I}$, es una biyección. ■

En el Teorema de Cantor vimos que para cualquier conjunto A, $|A| < |\mathscr{P}(A)|$. Sin embargo, no nos dice qué tan grande es $|\mathscr{P}(A)|$ respecto de $|A|$. El siguiente teorema nos permite conocer el cardinal de $\mathscr{P}(A)$ en función del cardinal de A.

***Teorema* 3.2.11.** $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Demostración. Veremos que existe una biyección de $\mathscr{P}(A)$ en

$$\{0,1\}^A = \{f : A \to \{0,1\} \mid f \text{ es función}\}.$$

Definimos $H : \mathscr{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ como sigue

Si $B \subseteq A$, $H(B) : A \to \{0,1\}$ es la función dada por

$$H(B)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B \\ \\ 0 \text{ si } x \in A - B \end{cases}$$

H es biyectiva.

$1°/$ Si $B \neq B'$, entonces $B - B' \neq \varnothing$ ó $B' - B \neq \varnothing$. Como en cualquiera de los casos la demostración es análoga, supondremos que $B - B' \neq \varnothing$ y sea $x \in B - B'$. Entonces $H(B)(x) = 1$ y $H(B')(x) = 0$ por lo que $H(B) \neq H(B')$ y así H es inyectiva.

$2°/$ Si $f \in \{0,1\}^A$, sea $B = \{x \in A | f(x) = 1\} \subseteq A$. Entonces $H(B) = f$ por lo que H es suprayectiva.

Por lo tanto $|\mathscr{P}(A)| = |\{0,1\}^A| = |\{0,1\}|^{|A|} = 2^\alpha$. ■

§ 3.3 Conjuntos finitos

Definiremos ahora el concepto de conjunto finito y de aquí el de cardinal finito.

Definición 3.3.1. *Sea A un conjunto y $\mathscr{P}(A)$ el conjunto potencia de A con el orden parcial determinado por $\subseteq$. Diremos que A es* ***finito*** *si cada cadena no vacía de elementos de $\mathscr{P}(A)$ tiene máximo.*

Esto es, si τ es una cadena no vacía contenida en $\mathscr{P}(A)$, existe $C \in \tau$ tal que para cada $C' \in \tau$ se tiene que $C' \subseteq C$.

Diremos que A es **infinito** si A no es finito.

***Proposición* 3.3.1.** *Si A y B son conjuntos tales que $|A| = |B|$. Entonces A es finito si y sólo si B es finito.*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva y supongamos que A es finito. Demostraremos que B es finito.

Sea τ una cadena no vacía de elementos de $\mathscr{P}(B)$ y sea

$$\tau' = \{f^{-1}[C] | C \in \tau\}.$$

τ' es una cadena no vacía de elementos de $\mathscr{P}(A)$ ya que si $f^{-1}[C]$ y $f^{-1}[C']$ pertenecen a τ' entonces como C y C' pertenecen a τ, se tiene que $C \subseteq C'$ ó $C' \subseteq C$ y de aquí $f^{-1}[C] \subseteq f^{-1}[C']$ ó $f^{-1}[C'] \subseteq f^{-1}[C]$.

Como A es finito entonces τ' tiene un máximo D. Como $D \in \tau'$, entonces $D = f^{-1}[E]$ para alguna $E \in \tau$ y por ser f biyectiva $f[D] = f[f^{-1}[E]]$. Afirmamos que E es el máximo de τ. En efecto si $C \in \tau$, entonces $f^{-1}[C] \in \tau'$ por lo que $f^{-1}[C] \subseteq D = f^{-1}[E]$ y por lo tanto

$$C = f[f^{-1}[C]] \subseteq f[D] = f[f^{-1}[E]] = E.$$

Por lo tanto B es finito.

La demostración es la misma si suponemos que B es finito, basta intercambiar f por f^{-1}. ■

Ejemplo 3.3.1.
(a) $\varnothing$ es un conjunto finito. La única cadena en $(\mathscr{P}(\varnothing), \subseteq)$ es $\{\varnothing\}$.
(b) $\{\varnothing\}$ es finito ya que las únicas cadenas en $(\mathscr{P}(\varnothing), \subseteq)$ son $\{\varnothing\}$, $\{\{\varnothing\}\}$ y $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ y evidentemente todas tienen máximo.

A partir de conjuntos finitos dados, podemos construir otros conjuntos finitos, como lo dice el siguiente teorema

***Teorema* 3.3.2.** *Sea A un conjunto finito. Entonces*
(1) *Si $B \subseteq A$ entonces B es finito,*
(2) *$A \times \{x\}$ es finito,*
(3) *Si C es un conjunto finito entonces $A \cup C$ es finito. En particular $A \cup \{x\}$ es finito.*

Demostración.
(1) Si τ es una cadena de subconjuntos de B, en particular es una cadena de subconjuntos de A y como A es finito entonces τ tiene máximo.

(2) Como $A \sim A \times \{x\}$ y A es finito entonces, por la Proposición 3.3.1, $A \times \{x\}$ es finito.

(3) Sea τ una cadena en $(\mathscr{P}(A \cup B), \subseteq)$. Entonces es fácil ver que $\tau_1 = \{C \cap A | C \in \tau\}$ y $\tau_2 = \{C \cap B | C \in \tau\}$ son cadenas en $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ y $(\mathscr{P}(B), \subseteq)$ respectivamente y por lo tanto, por hipótesis, τ_1 tiene elemento máximo D y τ_2 tiene máximo E.

Sean $C_1, C_2 \in \tau$ tales que $D = C_1 \cap A$ y $E = C_2 \cap B$. Como τ es cadena, entonces $C_1 \subseteq C_2$ o $C_2 \subseteq C_1$. No se pierde generalidad si suponemos que $C_1 \subseteq C_2$.

Afirmamos que C_2 es el máximo de τ.

Sea $C \in \tau$. Entonces $C \cap A \in \tau_1$, y $C \cap B \in \tau_2$, por lo que $C \cap A \subseteq C_1 \subseteq C_2$ y $C \cap B \subseteq C_2$, así que $C = C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B) \subseteq C_2$. Por lo tanto $A \cup B$ es finito. ■

Definición 3.3.2. *Un orden parcial $\leq$ en X se llama **doble buen orden** si es un buen orden y cada subconjunto no vacío de X tiene máximo.*

***Teorema* 3.3.3.** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un conjunto A*
(1) *A es finito,*
(1′) *Cada cadena no vacía de conjuntos en $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ tiene mínimo,*
(2) *Cada familia no vacía de conjuntos en $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ tiene un maximal,*
(2′) *Cada familia no vacía de conjuntos en $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$ tiene un minimal (Tarski),*
(3) *Si $B \subsetneq A$ entonces A no es equipotente a B (Dedekind),*
(4) *A acepta un doble buen orden.*

Demostración. Si $A = \varnothing$ las equivalencias son triviales, por lo que supondremos que $A \neq \varnothing$.

Dejamos como ejercicio la demostración de (1) si y sólo si (1′) y (2) si y sólo si (2′).

(**1**) $\Rightarrow$ (**2**) Sea $\mathcal{D}$ una familia no vacía de conjuntos en $(\mathscr{P}(A), \subseteq)$. Como cada cadena por hipótesis tiene máximo entonces está acotada y por lo tanto $\mathcal{D}$ tiene un maximal por el Lema de Zorn.

(**2**) $\Rightarrow$ (**3**) Supongamos que $B \subsetneq A$ y que $\varphi : A \longrightarrow B$ es biyectiva.

Sea $\tau = \{X \subseteq B | X \subsetneq \varphi^{-1}(X)\}$. $\tau \neq \varnothing$ ya que $B \subsetneq \varphi^{-1}(B) = A$. Además, si $X \in \tau$ entonces $\varphi^{-1}(X) \in \tau$ pues $\varphi^{-1}(X) \subsetneq \varphi^{-1}(\varphi^{-1}(X))$.

Por hipótesis τ tiene maximal X_0. Pero esto es un absurdo porque $X_0 \subsetneq \varphi^{-1}(X_0)$ y $\varphi^{-1}(X_0) \in \tau$. Por lo tanto φ no puede ser biyectiva.

(**3**) $\Rightarrow$ (**4**) Por el Teorema de Zermelo, A acepta un buen orden $\leq$. Probaremos que cada subconjunto no vacío de A tiene máximo.

Sea $\varnothing \neq S \subseteq A$ y sea s_0 el mínimo de S. Supongamos que A no tiene máximo. Entonces para cada $s \in S$ existe $s' \in S$ tal que $s < s'$, es decir, $\{t \in S | s < t\} \neq \varnothing$ y por ser $\leq$ un buen orden este último conjunto tiene mínimo.

Construiremos una función inyectiva, pero no suprayectiva, de A en A. Definimos $\varphi : A \longrightarrow A$ por

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A - S \\ \\ \text{mín}\{t \in S | x < t\} & \text{si } x \in S. \end{cases}$$

Claramente φ es inyectiva (demuéstrelo), y no es suprayectiva ya que s_0, el mínimo de S, no pertenece al rango de la función y eso significa que A es equipotente con un subconjunto propio de A, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto S debe tener máximo y así A acepta un doble buen orden.

(**4**) $\Rightarrow$ (**1**) Sea $\leq$ un doble buen orden en A, y sean x_0 y x_1 el mínimo y el máximo de A respectivamente, es decir, $x_0 \leq x \leq x_1$ para todo $x \in A$.

Para cada $x \in A$ sea $A_x = \{a \in A | a \leq x\}$ y sea $S = \{x \in A | A_x \text{ es finito}\}$. Como S es un subconjunto no vacío de A, ya que $x_0 \in S$, entonces S tiene máximo que denotamos por y. Demostraremos que $y = x_1$ y así tendremos que $A_y = A_{x_1} = \{a \in A | a \leq x_1\} = A$ es finito.

Supongamos que $y < x_1$ y consideremos $T = \{a \in A | y < a\}$. Nuevamente T es un subconjunto no vacío de A, ya que $x_1 \in T$, y por lo tanto tiene mínimo y_0 y así $y < y_0$.

Afirmamos que $A_{y_0} = A_y \cup \{y_0\}$.

1°/ Por ser $y < y_0$, se tiene que $A_y \subseteq A_{y_0}$ y como $y_0 \in A_{y_0}$, entonces $A_y \cup \{y_0\} \subseteq A_{y_0}$.

2°/ Si $x \in A_{y_0}$, entonces $x \leq y_0$. Si $x = y_0$ evidentemente $y_0 \in A_y \cup \{y_0\}$. Supongamos entonces que $x < y_0$. Si $y < x$, debido a que $x \in T$ y que y_0 es el mínimo de T, debe ser $y_0 \leq x$ que contradice la hipótesis de que $x < y_0$. Por lo tanto $x \leq y$ y así $x \in A_y$. En ambos caso hemos probado que $x \in A_y \cup \{y_0\}$, por lo que $A_{y_0} \subseteq A_y \cup \{y_0\}$.

Como $A_{y_0} = A_y \cup \{y_0\}$ es finito, ya que A_y y $\{y_0\}$ lo son (Teorema 3.3.2 (3)), así tendríamos $y_0 \in S$, pero esto es imposible ya que $y < y_0$ y y es el máximo de S. Por lo tanto $y = x_1$ y así $A_y = A_{x_1} = A$ es finito. ■

***Corolario* 3.3.4.** *Un conjunto A es finito si y sólo si cada buen orden en A es un doble buen orden.*

Definición 3.3.3. *Un cardinal α es un* ***cardinal finito*** *si existe un conjunto finito A tal que $|A| = \alpha$. En caso contrario diremos que α es un* ***cardinal infinito****.*

Nota 11. Aceptaremos que existe un conjunto infinito (Este es en realidad uno de los axiomas de la Teoría de Conjuntos formal).

***Proposición* 3.3.5.** *Sean α y β cardinales con $\alpha \leq \beta$ y B un conjunto tal que $|B| = \beta$. Entonces existe un subconjunto A de B tal que $|A| = \alpha$.*

Demostración. Sea A' un conjunto tal que $|A'| = \alpha$. Como $\alpha \leq \beta$ existe una función inyectiva $f : A' \longrightarrow B$. Entonces $f' : A' \longrightarrow f(A')$ definida por $f'(a) = f(a)$ es una función biyectiva, por lo que A' y $f(A')$, que es un subconjunto de B, tienen la misma cardinalidad α. ■

El equivalente del Teorema 3.3.2 para cardinales finitos es

***Teorema* 3.3.6.** *Sean α y β cardinales.*
(1) *Si α es finito y $\beta \leq \alpha$ entonces β es finito.*
(2) *Si α y β son finitos entonces $\alpha + \beta$ es finito.*

***Corolario* 3.3.7.** *Sean α y β cardinales.*
(1) *Si β es infinito y $\beta \leq \alpha$ entonces α es infinito.*
(2) *Si α es infinito entonces $\alpha + \beta$ es infinito. En particualr $\alpha + 1$ es infinito.*

***Corolario* 3.3.8.** *Si α es finito y β es infinito entonces $\alpha < \beta$.*

Demostración. No puede ser que $\beta \leq \alpha$ ya que por el Corolario 3.3.7, se tendría que α es infinito, que por hipótesis no lo es. ■

***Teorema* 3.3.9.** *Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos finitos ajenos dos a dos, en donde I es finito. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es finito.*

Demostración. Mostraremos que $\bigcup_{i \in I} A_i$ acepta un doble buen orden y por el Teorema 3.3.3 $\bigcup_{i \in I} A_i$ debe ser finito.

Como I y cada A_i con $i \in I$ son finitos, cada uno de ellos acepta un doble buen orden que denotaremos por $<_I$, $<_i$ $(i \in I)$, respectivamente.

Definimos un doble buen orden $<$ sobre $\bigcup_{i\in I} A_i$ como sigue

$$a < b \text{ si y sólo si } \begin{cases} a <_i b \text{ si } a, b \in A_i \text{ para algun } i \in I \\ \\ i <_I j \text{ si } a \in A_i, b \in A_j \text{ y } j \neq i \end{cases}$$

Verifiquemos que efectivamente, $<$ es un doble buen orden

$1°/$ $<$ es un orden parcial.

(i) $a \not< a$ para toda $a \in \bigcup_{i\in I} A_i$ es evidente.

(ii) Supongamos que $a < b$ y $b < c$. Basta considerar los siguiente tres casos:

> ***Caso 1*:** $a, b, c \in A_i$ para alguna $i \in I$. Entonces $a <_i b$ y $b <_i c$ y como $<_i$ es un orden parcial entonces $a < c$.
>
> ***Caso 2*:** $a, b \in A_i$ y $c \in A_j$ con $i \neq j$. Como $a, b \in A_i$ y $b < c$, entonces $i <_I j$ y así $a < c$.
>
> ***Caso 3*:** $a \in A_i$, $b \in A_j$ y $c \in A_k$ con $i \neq j$, $j \neq k$, $k \neq i$. Entonces $i <_I j$, $j <_I k$ y por lo tanto $i <_I k$, por lo que $a < c$.

$2°/$ $<$ es un doble buen orden.

Sea $\varnothing \neq S \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Entonces $S \cap A_i \neq \varnothing$ para alguna $i \in I$.

Sean $i_0 = \text{mín}\{i \in I | S \cap A_i \neq \varnothing\}$ y $j_0 = \text{máx}\{i \in I | S \cap A_i \neq \varnothing\}$. Como $\varnothing \neq S \cap A_{i_0} \subseteq A_{i_0}$, $\varnothing \neq S \cap A_{j_0} \subseteq A_{j_0}$ e $<_{i_0}$, $<_{j_0}$ son ambos doble buen orden, podemos tomar su mínimo y su máximo a_0 y a_1 respectivamente, es decir, $a_0 = \text{mín}(S \cap A_{i_0})$ y $a_1 = \text{máx}(S \cap A_{j_0})$.

Afirmamos que $a_0 = \text{mín}\, S$ y $a_1 = \text{máx}\, S$.

Sea $a \in S$. Como $a \in A_i$ para alguna $i \in I$ se tiene que $i_0 \leq_I i \leq_I j_0$.

Si $i = i_0$ entonces $a_0, a \in S \cap A_{i_0}$ y como a_0 es el mínimo en $S \cap A_{i_0}$ entonces $a_0 \leq a$.

Si $i_0 <_I i$ entonces $a_0 < a$ por definición del orden en $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Análogamente para $i \leq_I j_0$

Si $i = j_0$ entonces $a_1, a \in S \cap A_{j_0}$ y así $a \leq a_1$.

Si $i <_I j_0$ entonces $a < a_1$ por definición de orden $\bigcup_{i\in I} A_i$.

Así que en cualquier caso $a_0 \leq a \leq a_1$.

Por último, como $\bigcup_{i\in I} A_i$ posee un doble orden, por el Teorema 3.3.3, $\bigcup_{i\in I} A_i$ es finito. ■

***Corolario* 3.3.10.** *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos en donde I es finito y para cada $i \in I$, A_i es finito, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es finito.*

Demostración. Sean, para cada $i \in I$, $B_i = A_i \times \{i\}$. Cada B_i es finito ya que $B_i \sim A_i$. Por el Teorema 3.3.9, como $B_i \cap B_j = \varnothing$ si $i \neq j$, entonces $\bigcup_{i\in I} B_i$ es finito.

Claramente la función $f : \bigcup_{i\in I} B_i \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ dada por $f((a,i)) = a$, donde $(a,i) \in B_i = A_i \times \{i\}$ es suprayectiva. Por lo tanto, por el Ejercicio 3.12, $\bigcup_{i\in I} A_i$ es finito. ■

***Corolario* 3.3.11.** *Si A y B son conjuntos finitos entonces $A \times B$ es finito.*

Demostración. $A \times B = \bigcup_{b\in B} (A \times \{b\})$ donde cada término de la unión es un conjunto finito ya que $A \times \{b\} \sim A$ es finito y como B también lo es, por el Teorema 3.3.9, $A \times B$ es finito. ■

***Teorema* 3.3.12.** *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia no vacía de conjuntos finitos, donde el conjunto de índices I es finito, entonces $\underset{i\in I}{\times} A_i$ es finito.*

Demostración. Como I es finito, podemos considerar un doble buen orden $\leq$ en I (véase el Teorema 3.3.3). Sea

$$I' = \{i \in I | \underset{j\leq i}{\times} A_j \text{ es finito}\} \subseteq I.$$

Demostraremos que el máximo de I pertenece a I'. $I' \neq \varnothing$ ya que $i_0 = \min I \in I'$. Probaremos que $\max I' = \max I$. Sea $j_0 = \max I'$ y supongamos que $j_0 < \max I$. Entonces $\{i \in I | j_0 < i\} \neq \varnothing$ y sea $j_1 = \min\{i \in I | j_0 < i\}$. Sabemos que $\underset{i\leq j_0}{\times} A_i$ es finito y A_{j_1} es finito por hipótesis, entonces por el Corolario 3.3.11 $\underset{i\leq j_1}{\times} A_i \sim (\underset{j\leq j_0}{\times} A_j) \times A_{j_1}$ es finito, lo que implica que $j_1 \in I'$, que es un absurdo, por lo tanto $j_0 = \max I$ y entonces $\underset{j\leq j_0}{\times} A_j = \underset{i\in I}{\times} A_i$ es finito. ■

***Corolario* 3.3.13.** *Sea I finito y $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de cardinales finitos. Entonces $\sum_{i\in I}\alpha_i$ y $\prod_{i\in I}\alpha_i$ son finitos.*

***Corolario* 3.3.14.** *Si A y B son conjuntos finitos entonces $\mathscr{P}(A)$ y A^B son finitos.*

Demostración.
(i) Como $A^B = \{f : B \to A | f \text{ es función}\}$ entonces $A^B \sim \underset{x\in B}{\times} A_x$, donde $A_x = A$ para toda $x \in B$ (Proposición 3.2.10 (3)), y como A y B son finitos, tenemos que $\underset{x\in B}{\times} A$ es finito.
(ii) Como $\mathscr{P}(A) \sim \{0,1\}^A$ (Teorema 3.2.11), y por (i) $\{0,1\}^A$ es finito, entonces $\mathscr{P}(A)$ es finito. ■

***Corolario* 3.3.15.** *Si α y β son cardinales finitos entonces $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, α^β son cardinales finitos. En particular 2^α es finito.*

***Proposición* 3.3.16.** *Sean k, m y n cardinales finitos. Entonces*
(1) $m + n = k + n \Longrightarrow m = k$.
(2) $m \cdot n = k \cdot n$ *y* $n \neq 0 \Longrightarrow m = k$.
(3) $n \leq m \leq n + 1 \Longrightarrow m = n$ *o* $m = n + 1$.

Demostración.
(1) Supongamos que $k \leq m$ y sean A, B y C conjuntos tales que $B \subseteq A$, $C \cap A = \varnothing$, $|A| = m, |B| = k$ y $|C| = n$.

$$k + n = |B| + |C| = |B \cup C|,$$

(recordamos que $C \cap B \subseteq C \cap A = \varnothing$),

$$m + n = |A| + |C| = |A \cup C|.$$

Tenemos que $B \cup C \subseteq A \cup C$, y por hipótesis $|B \cup C| = |A \cup C|$. Por lo tanto $A \cup C = B \cup C$, ya que si fueran distintos, entonces tendríamos que $A \cup C$ es equipotente a un subconjunto propio, $B \cup C$, lo que contradice el hecho de que $A \cup C$ es finito. Por último, como $A \cap C = \varnothing$ se tiene que $A = B$ y de aquí $k = m$.

(2) Supongamos que $k \leq m$ y sean A, B, C conjuntos como en (1). Tenemos entonces que $B \times C \subseteq A \times C$ y, por hipótesis, $|B \times C| = |A \times C|$. Pero por ser $A \times C$ finito, debe ser $A \times C = B \times C$, y como $C \neq \varnothing$, ya que por hipótesis $|C| = n \neq 0$, podemos afirmar entonces que $A = B$ y por lo tanto $k = m$.

(3) Sean A, B conjuntos tales que $A \subseteq B$, $|A| = n, |B| = m$.

Si $A \neq B$, es decir $n < m$, existe $b \in B$ tal que $b \notin A$. Entonces $A \cup \{b\} \subseteq B$ y por lo tanto $n + 1 = |A \cup \{b\}| \leq |B| = m$. Pero por hipótesis tenemos que $m \leq n + 1$. Por lo tanto $m = n + 1$. ■

§ 3.4 Conjuntos numerables y conjuntos infinitos

Como $\leq$ es un buen orden en los cardinales, entonces cualquier conjunto no vacío de cardinales tiene elemento mínimo. Así pues, si α es un cardinal infinito, el conjunto no vacío $\{\beta | \beta$ cardinal infinito y $\beta \leq \alpha\}$ tiene mínimo. Denotamos por $\aleph_0$ a éste mínimo, es decir, $\aleph_0$ **es el mínimo cardinal infinito**.

Definición 3.4.1. *Un conjunto A se llama **numerable** si $|A| = \aleph_0$.*

Veamos ahora algunas propiedades de los conjuntos numerables.

***Proposición* 3.4.1.** *Sean A y B conjuntos infinitos tales que $|A| = \aleph_0$ y $B \subseteq A$. Entonces $|B| = \aleph_0$.*

Demostración. Como $B \subseteq A$ entonces $|B| \leq |A|$, y por ser B infinito y $|A| = \aleph_0$ el mínimo cardinal infinito, entonces debe ser $|B| = \aleph_0$. ■

***Proposición* 3.4.2.** *Si N y F son conjuntos tales que N es numerable, F es finito y $F \subseteq N$, entonces $N - F$ es numerable.*

Demostración. Como $N = F \cup (N - F)$, si $N - F$ fuera finito entonces N sería finito, que sabemos que no lo es por hipótesis, así que $N - F$ es infinito y por la Proposición 3.4.1 $|N - F| = \aleph_0$. ■

***Corolario* 3.4.3.** *Para todo cardinal finito n se tiene $\aleph_0 + n = \aleph_0$.*

***Corolario* 3.4.4.** *Si α es un cardinal infinito y n es un cardinal finito entonces $\alpha + n = \alpha$.*

Demostración. $\aleph_0 \leq \alpha$ ya que α es infinito, y por (i) de la Proposición 3.2.3, $\alpha = \aleph_0 + \beta$ para algún cardinal β. Entonces, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa en la suma de cardinales,

$$\begin{array}{rclcl} \alpha + n & = & (\aleph_0 + \beta) + n & = & \aleph_0 + (\beta + n) \\ & = & \aleph_0 + (n + \beta) & = & (\aleph_0 + n) + \beta \\ & = & \aleph_0 + \beta & = & \alpha. \end{array}$$ ■

Nota 12. El hecho de que un conjunto N sea infinito nos permite asegurar la existencia de elementos $a, b \in N$ tales que $a \neq b$. Esto es por la siguiente razón; como $\varnothing$ es finito y N es infinito, entonces $N \neq \varnothing$, por lo que podemos tomar un elemento $a \in N$. $N - \{a\}$ es infinito ya que si fuera finito, entonces por el Teorema 3.3.2 $(N - \{a\}) \cup \{a\} = N$ sería finito, que no lo es. Nuevamente, como $N - \{a\} \neq \varnothing$, entonces podemos tomar $b \in N - \{a\}$ y así $a, b \in N$ y $a \neq b$. En realidad se puede demostrar más, como lo muestra el Ejercicio 3.48.

***Teorema* 3.4.5.** *Dado un conjunto numerable N, existen subconjuntos numerables A y B de N tales que $A \cap B = \varnothing$.*

Demostración. Sea

$$\mathfrak{A} = \{(A, f_A, B) | A, B \subseteq N,\ A \cap B = \varnothing \text{ y } f_A : A \to B \text{ función biyectiva}\}$$

$\mathfrak{A} \neq \varnothing$ ya que, por ser N infinito, podemos tomar $a, b \in N$ tales que $a \neq b$ (Nota 12) y por lo tanto $(\{a\}, f, \{b\}) \in \mathfrak{A}$, donde $f(a) = b$.

Definimos un orden parcial $\leq$ sobre $\mathfrak{A}$ como sigue
$(A, f_A, B) \leq (A', f_{A'}, B')$ si $A \subseteq A', B \subseteq B'$ y $f_{A'}|_A = f_A$

$\leq$ es un orden parcial

(a) Claramente $(A, f_A, B) \leq (A, f_A, B)$ para cada $(A, f_A, B) \in \mathfrak{A}$.

(b) Si $(A, f_A, B) \leq (A', f_{A'}, B')$ y $(A', f_{A'}, B') \leq (A, f_A, B)$, entonces $A \subseteq A', B \subseteq B', f_{A'}|_A = f_A$ y $A' \subseteq A, B' \subseteq B$ y $f_A|_{A'} = f_{A'}$. Entonces $A = A', B = B'$ y $f_A = f_{A'}$ y por lo tanto $(A, f_A, B) = (A', f_{A'}, B')$.

(c) Si $(A, f_A, B) \leq (A', f_{A'}, B')$ y $(A', f_{A'}, B') \leq (A'', f_{A''}, B'')$ entonces $A \subseteq A', B \subseteq B', f_{A'}|_A = f_A, A' \subseteq A'', B' \subseteq B'', f_{A''}|_{A'} = f_{A'}$. Así que $A \subseteq A'', B \subseteq B'', f_{A''}|_A = (f_{A''}|_{A'})|_A = f_{A'}|_A = f_A$ y de aquí $(A, f_A, B) \leq (A'', f_{A''}, B'')$.

$(\mathfrak{A}, \leq)$ tiene un maximal

Para esto probaremos que $(\mathfrak{A}, \leq)$ satisface la hipótesis del Lema de Zorn. Tomemos una cadena $\mathcal{C}$ en $(\mathfrak{A}, \leq)$ y sean

$$\mathcal{C}_0 = \{A \subseteq N | \text{existen } B \subseteq N \text{ y } f_A : A \to B \text{ tales que } (A, f_A, B) \in \mathcal{C}\}$$
$$\mathcal{C}_1 = \{B \subseteq N | \text{existen } A \subseteq N \text{ y } f_A : A \to B \text{ tales que } (A, f_A, B) \in \mathcal{C}\}.$$

Sea $X = \bigcup_{A \in C_0} A$, $Y = \bigcup_{B \in C_1} B$ y $f_X : X \longrightarrow Y$ dada por $f_X(a) = f_A(a)$ si $a \in A$. f_X está bien definida ya que si $a \in A \cap A'$, como A y A' forman parte de (A, f_A, B) y $(A', f_{A'}, B')$ respectivamente y pertenecen a $\mathcal{C}$ que

es una cadena, entonces uno de ellos está contenido en el otro, digamos $A \subseteq A'$, y así $f_{A'}|_A = f_A$, lo que significa que $f_{A'}(a) = f_A(a)$.

Es claro que $(X, f_X, Y) \in \mathfrak{A}$ ya que $X, Y \subseteq N$, $X \cap Y = \varnothing$ y f_X es biyectiva (ejercicio 3.17). Dejamos también como ejercicio demostrar que (X, f_X, Y) es una cota superior de $\mathcal{C}$. Por el Lema de Zorn $(\mathfrak{A}, \leq)$ tiene un maximal que denotamos por (A_0, f_{A_0}, B_0).

Veremos ahora que A_0 y B_0 son los conjuntos buscados.

A_0 es infinito. Si A_0 fuera finito, como f_{A_0} es biyectiva, entonces B_0 sería finito y por lo tanto también $A_0 \cup B_0$, y por la Proposición 3.4.2, $N-(A_0 \cup B_0)$ es infinito, por lo que podemos tomar una pareja de elementos distintos x, y de $N - (A_0 \cup B_0)$. Definimos $f_{A_0 \cup \{x\}} : A_0 \cup \{x\} \longrightarrow B_0 \cup \{y\}$ por

$$f_{A_0 \cup \{x\}}(a) = \begin{cases} f_{A_0}(a) & \text{si } a \in A_0 \\ \\ y & \text{si } a = x \end{cases}$$

Se tiene que

$$(A_0 \cup \{x\}, f_{A_0 \cup \{x\}}, B_0 \cup \{y\}) \in \mathfrak{A}$$

y

$$(A_0, f_{A_0}, B_0) < (A_0 \cup \{x\}, f_{A_0 \cup \{x\}}, B_0 \cup \{y\}),$$

lo que contradice que (A_0, f_{A_0}, B_0) es maximal en $\mathfrak{A}$. Por lo tanto A_0 es infinito. De lo anterior se tiene que B_0 es infinito. Además $A_0 \cap B_0 = \varnothing$ y como $A_0, B_0 \subseteq N$ se tiene que, por la Proposición 3.4.1, $|A_0| = |B_0| = |N| = \aleph_0$. ■

***Corolario* 3.4.6.** $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Demostración. Sea N un conjunto tal que $|N| = \aleph_0$. Por el Teorema 3.4.5, existen subconjuntos A y B de N tales que $A \cap B = \varnothing$ y $|A| = |B| = \aleph_0$. Entonces

$$\aleph_0 + \aleph_0 = |A| + |B| = |A \cup B| \leq |N| = \aleph_0.$$

Pero por otro lado $\aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0$ (Ejercicio 3.14) y de ambas desigualdades concluimos entonces que $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0$. ■

En realidad el Teorema 3.4.5 es cierto para cualquier conjunto infinito

***Teorema* 3.4.7.** *Se A un conjunto infinito. Entonces existen conjuntos C y C' tales que*
(1) $C \cap C' = \varnothing$.
(2) $|C| = |C'| = |A|$.
(3) $|C \cup C'| = |A|$.

Demostración. Sea

$$\mathcal{A} = \{(B, f_B) | B \subseteq A \text{ y } f_B : B \to (\{0\}\times B)\cup(\{1\}\times B) \text{ es función biyectiva}\}.$$

$\mathcal{A} \neq \varnothing$ ya que como A es infinito $\aleph_0 \leq |A|$ y entonces, por la Proposición 3.3.5, A contiene un subconjunto numerable N y, por el Teorema 3.4.5, existe una función biyectiva $f : N \longrightarrow (\{0\} \times N) \cup (\{1\} \times N)$. Definimos un orden parcial en $\mathcal{A}$ como sigue

$$(B, f_B) \leq (B', f_{B'}) \text{ si y sólo si } B \subseteq B' \text{ y } f_{B'}|_B = f_B.$$

Efectivamente $\leq$ es un orden parcial ya que
(1) $(B, f_B) \leq (B, f_B)$ para cada $(B, f_B) \in \mathcal{A}$.
(2) Si $(B, f_B) \leq (B', f_{B'})$ y $(B', f_{B'}) \leq (B, f_B)$ entonces $B \subseteq B' \subseteq B$ y así $B = B'$ y $f_{B'} = f_B|_{B'} = f_B|_B = f_B$. Por lo tanto $(B, f_B) = (B', f_{B'})$.
(3) Si $(B, f_B) \leq (B', f_{B'})$ y $(B', f_{B'}) \leq (B'', f_{B''})$ entonces $B \subseteq B' \subseteq B''$ y $f_{B'}|_B = f_B$, $f_{B''}|_{B'} = f_{B'}$ implica que $f_{B''}|_B = f_B$, por lo que $(B, f_B) \leq (B'', f_{B''})$.

Como en ocasiones anteriores, la idea es encontrar un elemento maximal (B_0, f_0) en $\mathcal{A}$ y demostrar que $|B_0| = |A|$. Para esto probaremos que $\mathcal{A}$ satisface la hipótesis del Lema de Zorn

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{A}, \leq)$ y sea

$$\mathcal{C}_0 = \{B \subseteq A \mid \text{ existe } f_B : B \to (\{0\} \times B) \cup (\{1\} \times B) \text{ con } (B, f_B) \in \mathcal{C}\}.$$

Ahora, sea $\mathcal{B} = \bigcup\{B \mid B \in \mathcal{C}_0\}$ y $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \longrightarrow (\{0\} \times \mathcal{B}) \cup (\{1\} \times \mathcal{B})$ definida por $f_{\mathcal{B}}(b) = f_B(b)$ si $b \in B$; f_B está bien definida pues si $B, B' \in \mathcal{C}$ con $B \subseteq B'$ y $b \in B \cap B'$ entonces $f_B(b) = f_{B'}(b)$ ya que f_B es la restricción de $f_{B'}$ a B. Además $f_{\mathcal{B}}$ es inyectiva, ya que para cualesquiera $b, b' \in \mathcal{B}$ si $f_{\mathcal{B}}(b) = f_{\mathcal{B}}(b')$ entonces existe un conjunto B de $\mathcal{C}_0$ donde $b, b' \in B$ y así $f_B(b) = f_B(b')$ y por lo tanto $b = b'$. También es suprayectiva, pues si $(i, b') \in (\{0\} \times \mathcal{B}) \cup (\{1\} \times \mathcal{B})$, entonces $(i, b') \in (\{0\} \times B) \cup (\{1\} \times B)$ para algún $B \in \mathcal{C}$ y como f_B es biyectiva existe $b \in B (\subseteq \mathcal{B})$ tal que $f_B(b) = (i, b')$. Por lo anterior, $(\mathcal{B}, f_{\mathcal{B}}) \in \mathcal{A}$. Además es una cota superior de $\mathcal{C}$ y, por el Lema de Zorn, $(\mathcal{A}, \leq)$ tiene un maximal (B_0, f_0).

Afirmamos que $A - B_0$ es finito, pues si no lo es entonces contiene un subconjunto numerable N, y con este N podemos construir un elemento

(D, f_D) de $\mathcal{A}$ tal que $(B_0, f_0) < (D, f_D)$, esto es, si $D = B_0 \cup N$ y

$$f_D : D \longrightarrow (\{0\} \times D) \cup (\{1\} \times D)$$

definida por $f_D|_{B_0} = f_0$ y $f_D|_N$ es una función biyectiva de N en $(\{0\} \times N) \cup (\{1\} \times N)$, cuya existencia queda asegurada por el Teorema 3.4.5. Entonces tendríamos que (D, f_D) es un elemento de $\mathcal{A}$ que es mayor que (B_0, f_0) lo que es imposible ya que (B_0, f_0) es maximal en $\mathcal{A}$. Por lo tanto $A - B_0$ debe ser finito. Además se tiene que

$$|A| = |B_0 \cup (A - B_0)| = |B_0| + |A - B_0| = |B_0|,$$

siendo la última igualdad justificada por el Corolario 3.4.3. Finalmente

$$|B_0| = |(\{0\} \times B_0) \cup (\{1\} \times B_0)| = |(\{0\} \times B_0)| + |(\{1\} \times B_0)| = |B_0| + |B_0|.$$

Así que $C = \{0\} \times B$ y $C' = \{1\} \times B$ son los conjuntos deseados. ■

***Corolario* 3.4.8.** *Si α es un cardinal infinito entonces $\alpha + \alpha = \alpha$.*

***Proposición* 3.4.9.** *Sean α y β cardinales con al menos uno de ellos infinito. Entonces*

$$\alpha + \beta = \text{máx}\{\alpha, \beta\}.$$

Demostración. Supongamos que $\beta \leq \alpha$. Por la Proposición 3.2.3 (1), existe un cardinal β' tal que $\alpha = \beta + \beta'$. Como $\beta \leq \alpha$, por la Proposición 3.2.3 inciso (2), $\beta + \alpha \leq \alpha + \alpha$. Entonces

$$\alpha = \beta + \beta' \leq \beta + \alpha \leq \alpha + \alpha = \alpha.$$

Por lo tanto $\alpha + \beta = \alpha$. ■

Veamos ahora algunas propiedades más del producto de cardinales.

***Proposición* 3.4.10.** *Sea n un cardinal finito. Entonces $\aleph_0 \cdot n = \aleph_0$.*

Demostración. Sean F y N conjuntos tales que $|F| = n$ y $|N| = \aleph_0$. Entonces $N \times F = \bigcup_{x \in F} (N \times \{x\})$. Como F es finito, por el Teorema 3.3.3 F admite un doble buen orden $\leq$. Sean x_0 y x_1 el mínimo y el máximo de F respectivamente y consideremos el siguiente conjunto

$$A = \{x \in F \mid \bigcup_{z \leq x} (N \times \{z\}) \text{ es numerable}\}.$$

$A \neq \varnothing$ ya que $x_0 \in A$ y por ser A finito (Teorema 3.3.2 (1)), tiene máximo y_0. Demostraremos que y_0 es igual a x_1 y por lo tanto tendremos que $N \times F$ es numerable.

Si $y_0 < x_1$ entonces $\bigcup_{z \leq y_0} (N \times \{z\})$ es numerable y $F - A \neq \varnothing$. Sea y_1 el mínimo de $(F - A)$. Tenemos que $[\bigcup_{z \leq y_0} (N \times \{z\})] \cup (N \times \{y_1\})$ es numerable (Corolario 3.4.6) por lo que $y_1 \in A$. Pero esto es un absurdo ya que $y_0 < y_1$ (recordamos que y_0 es el máximo de A). Por lo tanto $y_0 = x_1$ y entonces $N \times F = \bigcup_{x \leq x_1} (N \times \{x\})$ es numerable. ■

***Proposición* 3.4.11.** *Si n es un cardinal finito y α un cardinal infinito. Entonces $\alpha \cdot n = \alpha$.*

La demostración se deja como ejercicio al lector.

***Teorema* 3.4.12.** *Si N es un conjunto numerable entonces $N \times N$ es numerable.*

Demostración. Como queremos encontrar una función biyectiva de $N \times N$ en N, la idea es considerar los subconjuntos B de N tales que existe una función inyectiva de $B \times B$ en N y demostrar que existe uno numerable. Así que si tal conjunto existe debemos buscar entre los maximales con esta propiedad.

Sea $\mathcal{A} = \{(B, f_B) \mid B \subseteq N \text{ y } f_B : B \times B \to N \text{ es inyectiva}\}$. Definimos en $\mathcal{A}$ un orden parcial $\leq$ como sigue

$$(A, f_A) \leq (B, f_B) \text{ si y sólo si } A \subseteq B \text{ y } f_B|_A = f_A.$$

No es difícil demostrar que $\leq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{A}$.

Para ver que $(\mathcal{A}, \leq)$ tiene un maximal demostraremos que satisface la hipótesis del Lema de Zorn

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $(\mathcal{A}, \leq)$,

$$\mathcal{C}_0 = \{B \subseteq N \mid \text{existe } f_B : B \times B \to N \text{ tal que } (B, f_B) \in \mathcal{C}\}$$

y $\mathscr{B} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}_0} B$.

Observemos que si $(x, y) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B}$, podemos encontrar un conjunto $B \in \mathcal{C}_0$ tal que $x, y \in B$ pues $\mathcal{C}_0$ es una cadena respecto de $\subseteq$. Además, por la definición de orden en $\mathcal{A}$, si x, y son elementos de otro conjunto B' de $\mathcal{C}_0$ entonces $f_B(x, y) = f_{B'}(x, y)$.

Definimos ahora $f_{\mathscr{B}} : \mathscr{B} \times \mathscr{B} \longrightarrow N$ de la siguiente manera;

$$f_{\mathscr{B}}(x, y) = f_B(x, y) \quad si \quad (x, y) \in B \times B.$$

La observación hecha en el párrafo inmediato anterior a éste asegura que $f_{\mathscr{B}}$ está bien definida. Probaremos ahora que $(\mathscr{B}, f_{\mathscr{B}})$ es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Evidentemente $\mathscr{B} \subseteq N$ y $f_{\mathscr{B}}$ es inyectiva ya que si $f_{\mathscr{B}}(x,y) = f_{\mathscr{B}}(x',y')$, nuevamente por la observación anterior existe $B \in \mathcal{C}_0$ tal que $x,y,x',y' \in B$. Entonces, por la definición de $f_{\mathscr{B}}$, $f_B(x,y) = f_B(x',y')$ y por lo tanto $(x,y) = (x',y')$, ya que f_B es inyectiva.

Si $(B, f_B) \in \mathcal{C}$, entonces $B \subseteq \mathscr{B}$ y por definición de $f_{\mathscr{B}}$, $f_{\mathscr{B}}|_B = f_B$, por lo tanto $(\mathscr{B}, f_{\mathscr{B}})$ es una cota superior de la cadena $\mathcal{C}$ en $(\mathcal{A}, \leq)$.

Por el Lema de Zorn existe un elemento maximal (D, f_D) en $(\mathcal{A}, \leq)$. Supongamos que D es finito. Entonces $D \times D$ es finito y por lo tanto $N - f_D(D \times D)$ es infinito. Por otro lado , si $x \in N - D$ y $D' = D \cup \{x\}$, tenemos que $(D' \times D') - (D \times D)$ es finito y, por la Proposición 3.4.2, y el Corolario 3.3.8 existe una función inyectiva

$$h : (D' \times D') - (D \times D) \longrightarrow N - f_D(D \times D).$$

Definimos $f_{D'} : (D' \times D') \longrightarrow N$ por

$$f_{D'}(x,y) = \begin{cases} f_D(x,y) & \text{si } (x,y) \in (D \times D) \\ \\ h(x,y) & \text{si } (x,y) \in (D' \times D') - (D \times D). \end{cases}$$

Como f_D y h son inyectivas y

$$(D \times D) \cap [(D' \times D') - (D \times D)] = \varnothing = f_D(D \times D) \cap [N - f_D(D \times D)]$$

se tiene que $f_{D'}$ es inyectiva. Además, por definición, $f_{D'}|_D = f_D$, por lo que $(D', f_{D'}) \in \mathcal{A}$ y $(D, f_D) < (D', f_{D'})$ lo que es imposible ya que (D, f_D) es maximal en $\mathcal{A}$. Por lo tanto D es infinito y como f_D es inyectiva se tiene que $f_D(D \times D)$ es infinito y por ser $f_D(D \times D)$ un subconjunto de N, entonces $f_D(D \times D)$ es numerable. De aquí concluimos que $N \times N$ es numerable. ■

***Corolario* 3.4.13.** $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

***Teorema* 3.4.14.** *Sea A un conjunto infinito. Entonces $A \times A \sim A$.*

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 3.4.12. Sea $\mathcal{A} = \{(B, f_B) \mid B \subseteq A \;\; B \text{ infinito y } f_B : B \to B \times B \text{ es biyectiva}\}$. $\mathcal{A} \neq \varnothing$ ya que por ser A infinito, contiene un subconjunto numerable N y por el Teorema 3.4.12, $N \times N \sim N$.

Definimos un orden parcial en $\mathcal{A}$ dado por

$$(B, f_B) \leq (B', f_{B'}) \text{ si y sólo si } B \subseteq B' \text{ y } f_{B'}|_B = f_B.$$

Que $\leq$ es un orden parcial y que $(\mathcal{A}, \leq)$ tiene un maximal queda como ejercicio. Sea (D, f_D) un maximal de $(\mathcal{A}, \leq)$. Demostraremos que $|D| = |A|$. Lo primero que haremos será demostrar que $|A - D| < |D|$

Observemos primero que D es infinito, ya que (D, f_D) pertenece $(A, \leq)$.

Supongamos que $|A-D| \geq |D|$. Entonces $A-D$ es un conjunto infinito puesto que D lo es. Por la Proposición 3.3.5, existe un subconjunto E de $A-D$ tal que $|E| = |D|$. Entonces, debido a que $E \cap D = \varnothing$,

$$\begin{aligned} |(D \times E) \cup (E \times D) \cup (E \times E)| &= |D \times E| + |E \times D| + |E \times E| \\ &= |D| \cdot |E| + |E| \cdot |D| + |E| \cdot |E| \\ &= |D| \cdot |D| + |D| \cdot |D| + |D| \cdot |D| \\ &= |D| + |D| + |D| = |D| = |E|. \end{aligned}$$

Por lo tanto existe una función biyectiva

$$g : E \longrightarrow (D \times E) \cup (E \times D) \cup (E \times E).$$

La función $f_{D\cup E} : D \cup E \longrightarrow (D \cup E) \times (D \cup E)$ dada por

$$f_{D\cup E}(x) = \begin{cases} f_D(x) & \text{si } x \in D \\ \\ g(x) & \text{si } x \in E, \end{cases}$$

está bien definida ya que $D \cap E = \varnothing$, y es biyectiva puesto que restringida a cada uno de los conjuntos D y E lo es y además

$$[(D \times E) \cup (E \times D) \cup (E \times E)] \cap (D \times D) = \varnothing.$$

Por lo tanto $(D \cup E, f_{D\cup E}) \in \mathcal{A}$. Además $(D, f_D) < (D \cup E, f_{D\cup E})$, lo que es un absurdo ya que (D, f_D) es maximal en $(\mathcal{A}, \leq)$.

Por lo tanto se tiene $|A - D| < |D|$ y de aquí se obtiene que

$$|A| = |D \cup (A - D)| = |D| + |A - D| = \text{máx}\{|D|, |A - D|\} = |D|,$$

y como $f_D : D \longrightarrow D \times D$ es biyectiva, obtenemos el resultado deseado, es decir, $A \times A \sim A$. ■

***Corolario* 3.4.15.** *Si α es un cardinal infinito entonces $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.*

***Corolario* 3.4.16.** *Si α y β son cardinales y al menos uno de ellos es infinito, entonces $\alpha \cdot \beta = \text{máx}\{\alpha, \beta\}$.*

Demostración. Ejercicio 3.19. ■

Como $\aleph_0$ es el primer cardinal infinito, entonces para todo cardinal α, α es finito si y sólo si $\alpha < \aleph_0$. Esto nos dice que $\aleph_0$ no tiene antecesor inmediato, o lo que es lo mismo, el conjunto de los cardinales finitos no tiene máximo. Daremos un nombre especial a este tipo de cardinales

Definición 3.4.2. *Un cardinal α se llama **cardinal límite** si para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $\beta + 1 < \alpha$.*

Ejemplo 3.4.1. 0 y $\aleph_0$ son cardinales límite.

Con el orden que hemos definido en cardinales, y escritos en forma ascendente, la sucesión de ellos comenzaría como sigue

$$0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \aleph_{\omega+2}, \ldots$$

donde $\aleph_{i+1}$ es el cardinal que inmediatamente le sigue a $\aleph_i$, es decir, no existe ningún cardinal entre $\aleph_i$ y $\aleph_{i+1}$. $\aleph_0$ es el primer cardinal límite infinito y $\aleph_\omega$ es el cardinal límite que le sigue, etc.

Al cardinal $\aleph_{i+1}$, se llama ***sucesor*** de $\aleph_i$ y para un cardinal finito n su sucesor es $n + 1$ (Proposición 3.3.16). Así pues, cada cardinal tiene un sucesor, pero no todo cardinal es sucesor de otro, precisamente los cardinales límite son aquellos que no son sucesor de un cardinal.

Se sabe que el cardinal de los números reales es $2^{\aleph_0}$ y que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (Teorema 3.1.8). Como $\aleph_1$ es el mínimo cardinal mayor que $\aleph_0$, y $\leq$ es un orden total, entonces debe ser $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Sin embargo no se conoce un subconjunto del conjunto de los números reales cuyo cardinal sea $\aleph_1$.

Basados en la axiomática de la Teoría de Conjuntos (Zermelo-Fraenkel), incluyendo el axioma de elección, Kurt Gödel (1906-1978) demostró que, suponiendo la consistencia de la Teoría de Conjuntos, no se puede probar que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ y por otro lado, Cohen demostró (1964) que, suponiendo la consistencia de la Teoría de Conjuntos no se puede probar que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, suponer lo que se conoce como Hipótesis del Continuo, que es, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, o suponer su negación, que es, $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, es, en cualquiera de los dos casos, consistente con la axiomática de la Teoría de Conjuntos.

De manera más general, dado el cardinal infinito $\aleph_i$ se tiene que

$$\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i} \text{ ó } \aleph_{i+1} < 2^{\aleph_i}.$$

Suponer que sucede alguna de las dos afirmaciones es independiente de los axiomas de la Teoría de Conjuntos. A la hipótesis de que $\aleph_{i+1} = 2^{\aleph_i}$ para todo cardinal infinito $\aleph_i$ se le conoce como la **Hipótesis Generalizada del Continuo**.

§ 3.5 Sistemas de Peano

En esta sección introduciremos los Sistemas de Peano para definir los números naturales. Más explícitamente, los números naturales serán los elementos de un Sistema de Peano para lo cual, por supuesto, demostraremos que dos Sistemas de Peano son "isomorfos". Además construiremos

un modelo para un Sistema de Peano basado en los cardinales finitos. Existen otros modelos concretos de Sistemas de Peano, construidos en la Teoría de Conjuntos.

Definición 3.5.1. *Un* ***Sistema de Peano*** *es una terna* $(\mathbb{N},\boldsymbol{s},\boldsymbol{n_0})$ *donde* $\mathbb{N}$ *es un conjunto llamado el conjunto soporte,* $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ *y* $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *es una función, tales que*
(a) $\boldsymbol{n_0} \notin Im(s)$,
(b) $\boldsymbol{s}$ *es inyectiva,*
(c) *Para cada* $T \subseteq \mathbb{N}$, *si* $\boldsymbol{n_0} \in T$ *y si para toda*

$$n \in \mathbb{N}(n \in T \Longrightarrow \boldsymbol{s}(n) \in T)$$

entonces $T = \mathbb{N}$.

Nota 13. Al elemento $\boldsymbol{n_0}$ de la Definición 3.5.1 lo llamaremos el **elemento distinguido** del sistema de Peano.

Los pasos a seguir en el estudio de Sistemas de Peano son los siguientes

1. Demostrar la existencia de un Sistema de Peano y así toda la teoría que se deduzca de un Sistema de Peano es no contradictoria.
2. Demostrar que cualesquiera dos Sistema de Peano son "isomorfos" (vea la Definición 3.5.2), es decir, existe un único Sistema de Peano salvo isomorfismos, y entonces definiremos el conjunto de los números naturales como cualquier Sistema de Peano.
3. Trabajar con un Sistema de Peano, introduciendo la suma, el producto y una relación de orden.

***Proposición* 3.5.1.** *Si* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ *es un Sistema de Peano, entonces* $\mathbb{N}$ *es infinito.*

Demostración. $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es inyectiva, entonces $\boldsymbol{s}$ es biyectiva sobre su imagen y como $\boldsymbol{n_0} \notin Im(s)$, por el Teorema 3.3.3 (1)(3), se tiene que $\mathbb{N}$ es infinito. ■

Construcción de un Sistema de Peano

Sea $\mathbb{F} = \{n \mid n \text{ es cardinal finito}\}$. Definimos la función $\boldsymbol{s} : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ de la siguiente manera

$$\boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}(|A_n|) = |A_n \cup \{a_n\}|$$

donde para cada $n \in \mathbb{F}$, A_n es un conjunto tal que $|A_n| = n$ y $a_n \notin A_n$.

El elemento distinguido será $\mathbf{0} = |\varnothing|$.

Demostraremos que $(\mathbb{F}, \boldsymbol{s}, \mathbf{0})$ es un sistema de Peano
(1) $\mathbf{0} \notin Im(\boldsymbol{s})$.

Supongamos que $\mathbf{0} = \boldsymbol{s}(|A_0|) = |A_0 \cup \{a_0\}|$. Entonces $\varnothing \sim A_0 \cup \{a_0\}$, lo que es un absurdo, ya que $A_0 \cup \{a_0\} \neq \varnothing$.
(2) $\boldsymbol{s}$ es inyectiva.

Supongamos que $\boldsymbol{s}(n) = \boldsymbol{s}(m)$, es decir, $|A_n \cup \{a_n\}| = |A_m \cup \{a_m\}|$ donde, como sabemos, $a_n \notin A_n$ y $a_m \notin A_m$.

Queremos demostrar que $n = m$, es decir, que existe una biyección de A_n en A_m. Por hipótesis existe una función biyectiva

$$f : A_n \cup \{a_n\} \longrightarrow A_m \cup \{a_m\}.$$

Si $f(a_n) = a_m$ entonces $f|_{A_n} : A_n \longrightarrow A_m$ es biyectiva. Si $f(a_n) \neq a_m$, definimos $g : A_n \longrightarrow A_m$ como sigue

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } f(a) \neq a_m \\ \\ f(a_n) & \text{si } f(a) = a_m \end{cases}.$$

Es fácil ver que g es biyectiva y se deja como ejercicio al lector.
(3) Sea $T \subseteq \mathbb{F}$ tal que $\mathbf{0} \in T$ y tal que para cada

$$n \in T(n \in T \Rightarrow \boldsymbol{s}(n) \in T).$$

Demostraremos que $T = \mathbb{F}$.

Supongamos que $T \neq \mathbb{F}$ y sea A un conjunto finito tal que $n = |A| \notin T$. El conjunto $\{X \subseteq A \mid |X| \notin T\}$ es no vacío puesto que A pertenece a este conjunto. Como A es finito, por el Teorema 3.3.3, $(\{X \subseteq A \mid |X| \notin T\}, \subseteq)$ tiene un elemento minimal que denotamos por X_0. Entonces $|X_0| \notin T$ implica que $X_0 \neq \varnothing$ ya que $\mathbf{0} = |\varnothing| \in T$. Sean $x \in X_0$ y $X' = X_0 - \{x\}$. $X' \subsetneq X_0$ y por ser X_0 minimal en $(\{X \subseteq A \mid |X| \notin T\}, \subseteq)$, tenemos que $m = |X'| \in T$ y por lo tanto, por hipótesis, $\boldsymbol{s}(m) = \boldsymbol{s}(|A_m|) = \boldsymbol{s}(|X'|) \in T$. Pero $\boldsymbol{s}(|X'|) = |X' \cup \{x\}| = |X_0|$. Entonces $|X_0| \in T$, lo que contradice la hipótesis de que $|X_0| \notin T$, por lo tanto $T = \mathbb{F}$.

Concluimos entonces que $(\mathbb{F}, \boldsymbol{s}, \mathbf{0})$ es un Sistema de Peano. ■

***Corolario* 3.5.2.** *El conjunto de todos los cardinales finitos es infinito.*

Demostración. Consecuencia de la Proposición 3.5.1 y del Sistema de Peano construido anteriormente. ■

Veamos ahora que cualquier conjunto infinito contiene un Sistema de Peano.

***Teorema* 3.5.3.** *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto $\boldsymbol{N}$ de A, $\boldsymbol{n_0} \in \boldsymbol{N}$ y una función $\boldsymbol{s} : \boldsymbol{N} \longrightarrow \boldsymbol{N}$ tales que $(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ es un Sistema de Peano, es decir, todo conjunto infinito contiene un sistema de Peano.*

Demostración. Como A es infinito, entonces existe una función inyectiva $\boldsymbol{s} : A \longrightarrow A$ tal que $\boldsymbol{s}(A) \subsetneq A$. Sea $\boldsymbol{n_0} \in A - Im(\boldsymbol{s})$ y consideramos el siguiente conjunto

$$\mathcal{U} = \{B \subseteq A \mid \boldsymbol{n_0} \in B \text{ y tal que } x \in B \Rightarrow \boldsymbol{s}(x) \in B\}.$$

$\mathcal{U} \neq \varnothing$ ya que $A \in \mathcal{U}$. Sea $\mathbf{N} = \bigcap_{B \in \mathcal{U}} B$. Claramente $\mathbf{N} \in \mathcal{U}$.

Afirmamos que $(\mathbf{N}, \widehat{\boldsymbol{s}}, \boldsymbol{n_0})$ es un Sistema de Peano, donde $\widehat{\boldsymbol{s}} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ está definida por $\widehat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s}|_{\mathbf{N}}$.

Como $\boldsymbol{n_0} \notin Im(\widehat{\boldsymbol{s}})$ y $\widehat{\boldsymbol{s}}$ es inyectiva, sólo tenemos que demostrar que se satisface (c) de la definición de Sistema de Peano.

Sea $T \subseteq \mathbf{N}$ tal que $\boldsymbol{n_0} \in T$ y tal que cada vez que $x \in T$, $\widehat{\boldsymbol{s}}(x) \in T$. Debemos probar que $T = \mathbf{N}$.

Por las propiedades de T, tenemos que $T \in \mathcal{U}$, y como $\mathbf{N} = \bigcap_{B \in \mathcal{U}} B$, entonces $\mathbf{N} \subseteq T$. Por lo tanto $\mathbf{N} = T$. ■

***Teorema* 3.5.4.** *Si $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ es un Sistema de Peano, entonces $\boldsymbol{n_0}$ es el único elemento de $\mathbb{N}$ que no pertenece a $Im(\boldsymbol{s})$.*

Demostración. Mostraremos que $\mathbb{N} = Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\}$.

Como $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ es un Sistema de Peano, para demostrar que $Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\} = \mathbb{N}$ veremos que $Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\}$ $(\subseteq \mathbb{N})$ satisface las hipótesis de la condición (c) de la definición de Sistema de Peano

$\boldsymbol{n_0} \in Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\}$ y si $x \in Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\}$, entonces $\boldsymbol{s}(x) \in Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\}$. Por lo tanto $Im(\boldsymbol{s}) \cup \{\boldsymbol{n_0}\} = \mathbb{N}$. ■

***Teorema* 3.5.5.** *(Teorema de Recursión)*
Sea $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ un Sistema de Peano, y sean X un conjunto, $x_0 \in X$ y $\varphi : X \longrightarrow X$ una función. Entonces existe una única función $F : \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que $F(\boldsymbol{n_0}) = x_0$ y $F(\boldsymbol{s}(n)) = \varphi(F(n))$ para toda $n \in \mathbb{N}$, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{n_0} & \in & \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{s}} & \mathbb{N} \\ \downarrow & & {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ x_0 & \in & X & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

donde $F(\boldsymbol{n_0}) = x_0$.

Demostración.

Existencia. Sea

$$\mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} \times X \mid (\boldsymbol{n_0}, x_0) \in A \text{ y } (n, x) \in A \Rightarrow ((\boldsymbol{s}(n), \varphi(x)) \in A)\}.$$

$\mathcal{U} \neq \varnothing$ ya que $\mathbb{N} \times X \in \mathcal{U}$.

Sea $\mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{U}} A$.

Demostraremos que $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, $Dom\mathcal{F} = \mathbb{N}$ y que $\mathcal{F}$ es la función deseada.

(I) $\boldsymbol{\mathcal{F} \in \mathcal{U}}$

Es inmediato de la definición de $\mathcal{F}$.

(II) $\boldsymbol{Dom\mathcal{F} = \mathbb{N}}$.

Debemos demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x \in X$ tal que $(n, x) \in \mathcal{F}$. Sea

$$B = \{n \in \mathbb{N} | \text{ existe } x \in X \text{ tal que } (n, x) \in \mathcal{F}\}.$$

Demostraremos que $B = \mathbb{N}$ aplicando (c) de la definición de Sistema de Peano

(i) $\boldsymbol{n_0} \in B$ ya que $(\boldsymbol{n_0}, x_0) \in \mathcal{F}$.

(ii) Sea $n \in B$. Mostraremos que $\boldsymbol{s}(n) \in B$. $n \in B$ implica que existe $x \in X$tal que $(n, x) \in \mathcal{F}$ y como $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$, entonces $(\boldsymbol{s}(n), \varphi(x)) \in \mathcal{F}$. Luego $\boldsymbol{s}(n) \in B$ y por lo tanto $B = \mathbb{N}$.

(III) $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **es función**.

Sea $C = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una única } x \in X \text{ tal que } (n, x) \in \mathcal{F}\}$. Probaremos que $C = \mathbb{N}$, como hicimos en (II), usando el hecho de que $\mathbb{N}$ es un Sistema de Peano.

(i) $\boldsymbol{n_0} \in C$. Sabemos que $(\boldsymbol{n_0}, x_0) \in \mathcal{F}$ así que supongamos que $(\boldsymbol{n_0}, x_1) \in \mathcal{F}$ donde $x_1 \neq x_0$ y consideramos el conjunto $A = \mathcal{F} - \{(\boldsymbol{n_0}, x_1)\}$. Demostraremos que $A \in \mathcal{U}$ lo que nos lleva a un absurdo ya que en este caso se tendría $A \subset \mathcal{F} \subseteq A$. Evidentemente $(\boldsymbol{n_0}, x_0) \in A$. Si $(n, x) \in A$, por ser éste elemento de $\mathcal{F}$ se tiene que $(\boldsymbol{s}(n), \varphi(x)) \in \mathcal{F}$ y como $\boldsymbol{s}(n) \neq \boldsymbol{n_0}$ debido a que $\boldsymbol{n_0} \notin Im(\boldsymbol{s})$ (Teorema 3.5.4), entonces $(\boldsymbol{s}(n), \varphi(x)) \in A$. Por lo tanto $A \in \mathcal{U}$ que es un absurdo. Concluimos entonces que $x_1 = x_0$ y así $\boldsymbol{n_0} \in C$.

(ii) Supongamos que $n \in C$. Veremos que existe un único $y \in X$ tal que $(\boldsymbol{s}(n), y) \in \mathcal{F}$, es decir $\boldsymbol{s}(n) \in C$. Sea x el único elemento de X tal que $(n, x) \in \mathcal{F}$, supongamos que $(\boldsymbol{s}(n), y) \in \mathcal{F}$ con $y \neq \varphi(x)$ y sea $A = \mathcal{F} - \{(\boldsymbol{s}(n), y)\}$. Probaremos que $A \in \mathcal{U}$.
$1/^\circ$ $(\boldsymbol{n_0}, x_0) \in A$ puesto que $\boldsymbol{n_0} \neq \boldsymbol{s}(m)$ para toda $m \in \mathbb{N}$, y

esto implica que $(n_0, x_0) \neq (s(n_0), y)$.

$2/^\circ$ Supongamos que $(m,k) \in A$. Veremos que $(\boldsymbol{s}(m), \varphi(k)) \in A$. Si $(\boldsymbol{s}(m), \varphi(k)) = (\boldsymbol{s}(n), y)$, entonces $m = n$ dado que $\boldsymbol{s}$ es inyectiva y $y = \varphi(k)$ donde $k \neq x$ ya que $y \neq \varphi(x)$. Por lo tanto tendríamos que $(n,k), (n,x) \in A$ con $k \neq x$, lo que es imposible puesto que x es el único elemento de X tal que $(n,x) \in A$. Por lo tanto $(\boldsymbol{s}(m), \varphi(k)) \neq (\boldsymbol{s}(n), y)$ y así $(\boldsymbol{s}(m), \varphi(k)) \in A$. Tenemos entonces que $A \in \mathcal{U}$, lo que nuevamente no puede ser debido a que esto implicaría que $A \subset \mathcal{F} \subseteq A$.

Por lo tanto $\boldsymbol{s}(n) \in C$ y entonces $C = \mathbb{N}$.

Por último, $\mathcal{F}$ es la función deseada, esto es, $\mathcal{F}$ satisface

$$\varphi(\mathcal{F}(n)) = \mathcal{F}(\boldsymbol{s}(n)).$$

Unicidad. Supongamos que existe otra función $\psi' : \mathbb{N} \longrightarrow X$ tal que $\psi'(n_0) = x_0$ y $\psi'(\boldsymbol{s}(n)) = \varphi(\psi'(n))$. Demostraremos que $\psi' = \psi$ usando (c) de la definición de Sistema de Peano

$1^\circ/$ $\psi'(n_0) = x_0 = \psi(n_0)$

$2^\circ/$ Supongamos que $\psi'(n) = \psi(n)$. Demostraremos que $\psi'(\boldsymbol{s}(n)) = \psi(\boldsymbol{s}(n))$.

$$\psi'(\boldsymbol{s}(n)) = \varphi(\psi'(n)) = \varphi(\psi(n)) = \psi(\boldsymbol{s}(n)). \blacksquare$$

Cabe mencionar que existe otro tipo de demostración para este teorema, sin embargo es de mayor grado de dificultad, ya que utiliza el orden usual de un Sistema de Peano (Números Naturales), por lo que tendríamos que introducir antes este orden. En lugar de eso lo que nosotros hacemos aquí es demostrar primero el Teorema de Recursión y a partir de él definimos la suma de números naturales y finalmente usando la adición definimos el orden.

Definición 3.5.2. *Dos Sistemas de Peano* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ *y* $(\mathbb{N}', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{n_0}')$ *son* ***isomorfos*** *si existe una función biyectiva* $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ *tal que* $F(\boldsymbol{n_0}) = \boldsymbol{n_0}'$ *y* $F(\boldsymbol{s}(n)) = \boldsymbol{s}'(F(n))$*, es decir el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\boldsymbol{s}} & \mathbb{N} \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \mathbb{N}' & \xrightarrow{\boldsymbol{s}'} & \mathbb{N}' \end{array}$$

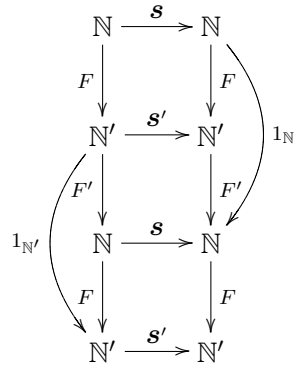
conmuta.

***Corolario* 3.5.6.** *Cualesquiera dos Sistemas de Peano* $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ *y* $(\mathbb{N}', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{n_0}')$ *son isomorfos.*

Demostración. Como $(\mathbb{N}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{n_0})$ y $(\mathbb{N}', \boldsymbol{s}', \boldsymbol{n_0}')$ son Sistemas de Peano, por el Teorema de Recursión, sabemos que existe una única función $F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}'$ tal que $F(\boldsymbol{n_0}) = \boldsymbol{n_0}'$ y $F(\boldsymbol{s}(n)) = \boldsymbol{s}'(F(n))$ y existe una única función $F' : \mathbb{N}' \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $F'(\boldsymbol{n_0}') = \boldsymbol{n_0}$ y $F'(\boldsymbol{s}'(n)) = \boldsymbol{s}(F'(n))$.

La composición $F' \circ F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es tal que $(F' \circ F)(\boldsymbol{n_0}) = \boldsymbol{n_0}$ y $(F' \circ F)(\boldsymbol{s}(n)) = \boldsymbol{s}((F' \circ F)(n))$, y como la identidad $1_{\mathbb{N}}$ también satisface que $1_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{n_0}) = \boldsymbol{n_0}$ y $1_{\mathbb{N}}(\boldsymbol{s}(n)) = \boldsymbol{s}(1_{\mathbb{N}}(n))$, se tiene, por la unicidad dada en el Teorema de Recursión, que $F' \circ F = 1_{\mathbb{N}}$.

Análogamente se demuestra que $F' \circ F = 1_{\mathbb{N}'}$.



Por lo tanto F es biyectiva, $F(\boldsymbol{n_0}) = \boldsymbol{n_0}'$ y $F(\boldsymbol{s}(n)) = \boldsymbol{s}'(F(n))$ (Además es la única con esta propiedad). ■

Como ya hemos demostrado que existe un único Sistema de Peano, salvo isomorfismos, de aquí en adelante denotaremos la función $\boldsymbol{s} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de un Sistema de Peano por $(\ )'$ y la llamaremos **función sucesor** y al elemento distinguido $\boldsymbol{n_0} \in \mathbb{N}$ lo denotamos por $\mathbf{0}$. Más adelante se encontrará el sentido de la nomenclatura de $\boldsymbol{s}$.

Usando el Teorema de Recursión definiremos la suma en un Sistema de Peano, y el producto, como se verá en su momento, se definirá a través de la suma y el mismo Teorema de Recursión.

***Teorema* 3.5.7.** *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', \mathbf{0})$ *un Sistema de Peano. Entonces existe una única función* $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que para cada* $m \in \mathbb{N}$, $\psi(m, \mathbf{0}) = m$ *y* $\psi(m, n') = (\psi(m, n))'$.

Demostración.

Existencia. Sea $m \in \mathbb{N}$, fijo y sean $X = \mathbb{N}$, $\varphi = (\ )'$ y $x_0 = m$. Por el Teorema de Recursión, existe una única función

$$\varphi_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ tal que } \varphi_m(\mathbf{0}) = m \text{ y } \varphi_m(n') = (\varphi_m(n))'.$$

Haciendo esto para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos definir $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ por $\psi(m, n) = \varphi_m(n)$. Claramente ψ satisface las condiciones del teorema, ya que $\psi(m, \mathbf{0}) = \varphi_m(\mathbf{0}) = m$ y $\psi(m, n') = \varphi_m(n') = (\varphi_m(n))' = (\psi(m, n))'$.

Unicidad. Supongamos que $\psi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ también satisface el teorema. Probaremos que para cada $m, n \in \mathbb{N}$ $\psi(m, n) = \psi_1(m, n)$.

Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo y sea $T = \{n \in \mathbb{N} \mid \psi(m, n) = \psi_1(m, n)\} \subseteq \mathbb{N}$.

Probaremos que $T = \mathbb{N}$.

$1°/$ $\mathbf{0} \in T$, ya que $\psi(m, \mathbf{0}) = m = \psi_1(m, \mathbf{0})$.

$2°/$ Supongamos que $n \in T$. Entonces $\psi(m, n) = \psi_1(m, n)$.

Ambas funciones satisfacen el teorema, así que $\psi(m, n') = (\psi(m, n))'$ y $\psi_1(m, n') = (\psi_1(m, n))'$ y como $\psi(m, n) = \psi_1(m, n)$ entonces $(\psi(m, n))' = (\psi_1(m, n))'$. Por lo tanto $\psi(m, n') = \psi_1(m, n')$ y de aquí $n' \in T$.

Entonces $T = \mathbb{N}$ y así $\psi(m, n) = \psi_1(m, n)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y como m es arbitrario, entonces $\psi = \psi_1$. ■

Notación 3.5. $\psi(m, n) = m + n$ y la llamaremos suma de m y n.

Con esta notación el Teorema 3.5.7 nos dice que $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es la única función tal que para toda $m, n \in \mathbb{N}$, $m + 0 = m$ y $m + n' = (m + n)'$.

En el Ejemplo 3.1.1, denotamos por 0 al cardinal de $\varnothing$ y por 1 al cardinal de $\{\varnothing\}$, y como ya hemos demostrado que el conjunto de los cardinales finitos junto con 0 y la función $\boldsymbol{s}$ dada en la página 67 es un Sistema de Peano, se tiene que $\boldsymbol{s}(0) = 1$. Con la notación recién introducida, tenemos que $0' = 1$. Como ya hemos visto que cualesquiera dos Sistemas de Peano son isomorfos, tenemos entonces que los elementos distinguidos de ellos se identifican entre sí mediante este isomorfismo, así que quedan identificados entre sí también los sucesores correspondientes. Es por esto que, abusando un poco de la notación, denotamos 1 como el sucesor del elemento distinguido, en el siguiente

***Corolario* 3.5.8.** *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', \mathbf{0})$ *un Sistema de Peano. Si* $1 = 0'$ *entonces* $n' = n + 1$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. $n + 1 = n + 0' = (n + 0)' = n'$. ■

***Teorema* 3. 5.9.** *La suma* $+$ *en* $\mathbb{N}$ *tiene las siguientes propiedades*
(1) *Para todas* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $(m + n) + r = m + (n + r)$. (propiedad asociativa)
(2) *Para todas* $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n = n + m$. (propiedad conmutativa)
(3) *Para toda* $m \in \mathbb{N}$, $m + 0 = m$. (existencia de elemento neutro)
(4) *Para todas* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $(n + m = r + m \Rightarrow n = r)$. (ley de cancelación)

Demostración. Demostraremos (1) y (4) y dejamos como ejercicio la demostración de (2). Sobre (3), ya se mencionó inmediatamente después de dar la Notación 3.5.

(1) Recordemos del Teorema de Recursión que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $\varphi_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ es la única que satisface $\varphi_m(0) = m$ y $\varphi_m(x') = (\varphi_m(x))'$.

Como

$$\begin{aligned}(\varphi_m \circ \varphi_n)(0) &= \varphi_m(\varphi_n(0)) \\ &= \varphi_m(n + 0) \\ &= \varphi_m(n) = m + n,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}((\varphi_m \circ \varphi_n)(x')) &= \varphi_m(\varphi_n(x')) \\ &= \varphi_m((\varphi_n(x))') \\ &= (\varphi_m(\varphi_n(x)))' \\ &= ((\varphi_m \circ \varphi_n)(x))'\end{aligned}$$

entonces, por la unicidad, $\varphi_{m+n} = \varphi_m \circ \varphi_n$.

Por lo tanto para toda $r \in \mathbb{N}$, $\varphi_{m+n}(r) = (\varphi_m \circ \varphi_n)(r)$, y así $(m + n) + r = m + (n + r)$.

(4) Sea $T = \{m \in \mathbb{N} \mid n + m = r + m \Rightarrow n = r\} \subseteq \mathbb{N}$. Demostraremos que $T = \mathbb{N}$ usando (c) de la definición de Sistema de Peano.

$1°/$ $0 \in T$ ya que $n + 0 = r + 0 \Rightarrow n = r$.

$2°/$ Sea $m \in T$. Entonces $n + m = r + m \Rightarrow n = r$.

Supongamos que $n + m' = r + m'$. Entonces $(n + m)' = (r + m)'$, y como $(\ )'$ es inyectiva se tiene que $n + m = r + m$, que por hipótesis de inducción, implica que $n = r$ y así $m' \in T$.

Por lo tanto $T = \mathbb{N}$. ■

En la página 44 definimos una suma en el conjunto de cardinales. Si restringimos esta suma a los cardinales finitos $\mathbb{F}$, por el Corolario 3.3.15,

esta suma está bien definida en $\mathbb{F}$, la suma de cardinales finitos es un cardinal finito. Por otro lado, como ya hemos visto, $(\mathbb{F}, \boldsymbol{s}, \mathbf{0})$ es un Sistema de Peano y como tal se tiene definida una suma (Teorema 3. 5.7). Veremos a continuación que estas dos sumas en realidad son la misma.

***Proposición* 3.5.10.** *La suma definida en el conjunto de cardinales finitos* $\mathbb{F}$ *coincide con la suma definida para el Sistema de Peano* $(\mathbb{F}, \boldsymbol{s}, \mathbf{0})$.

Demostración. Por el Teorema 3.5.7 basta demostrar que la función $\psi : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ dada por $\psi(|A|, |B|) = |A| + |B|$, donde $+$ denota la suma definida para cardinales la cual satisface, $\psi(|A|, |\varnothing|) = |A|$ y $\psi(|A|, \boldsymbol{s}(|B|)) = \boldsymbol{s}(\psi(|A|, |B|))$:
(a) $\psi(|A|, |\varnothing|) = |A| + |\varnothing| = |A|$
(b) Sea $c \notin A \cup B$. $\psi(|A|, \boldsymbol{s}(|B|)) = |A| + \boldsymbol{s}(|B|)$
$= |A| + |B \cup \{c\}|$
$= |A \overset{\bullet}{\cup} (B \cup \{c\})|$
$= |(A \overset{\bullet}{\cup} B) \cup \{c\}|$
$= \boldsymbol{s}(|A| + |B|)$
$= \boldsymbol{s}(\psi(|A|, |B|))$. ■

Introduciremos ahora el producto en un Sistema de Peano

***Teorema* 3.5.11.** *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *un Sistema de Peano. Entonces existe una única función* $\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *tal que para cada* $m, n \in \mathbb{N}$ $\Psi(m, 0) = 0$ *y* $\Psi(m, n') = \Psi(m, n) + m$.

Demostración.

Existencia. Sea $m \in \mathbb{N}$ fijo. Para $X = \mathbb{N}$ sea $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\varphi(n) = n + m$ y sea $x_0 = 0$. Por el Teorema de Recursión existe una única función $\Phi_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $\Phi_m(0) = 0$ y $\varphi(\Phi_m(n)) = \Phi_m(n')$.

Sea $\Psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $\Psi(m, n) = \Phi_m(n)$. Ψ satisface las condiciones del teorema pues $\Psi(m, 0) = \Phi_m(0) = 0$ y

$$\Psi(m, n') = \Phi_m(n') = \varphi(\Phi_m(n)) = \varphi(\Psi(m, n)) = \Psi(m, n) + m.$$

Unicidad. Supongamos que $\Psi_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ satisface también que $\Psi_1(m, 0) = 0$ y $\Psi_1(m, n') = \Psi_1(m, n) + m$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Para m fijo, sea $T = \{n \in \mathbb{N} | \Psi(m, n) = \Psi_1(m, n)\}$. Probaremos que $T = \mathbb{N}$.
$1°/$ $0 \in T$ ya que $\Psi(m, 0) = 0 = \Psi_1(m, 0)$
$2°/$ Sea $n \in T$, es decir, $\Psi(m, n) = \Psi_1(m, n)$. Entonces $\Psi(m, n') = \Psi(m, n) + m = \Psi_1(m, n) + m = \Psi_1(m, n')$. Por lo tanto $n' \in T$. Entonces $T = \mathbb{N}$ y así $\Psi(m, n) = \Psi_1(m, n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. ■

Notación 3.6. $\Psi(m,n) = m \cdot n$ y la llamaremos el producto de m y n. Con esta notación tenemos $m \cdot 0 = 0$ y $m \cdot n' = m \cdot n + m$.

***Teorema* 3.5.12.** *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *un Sistema de Peano. El producto tiene las siguientes propiedades*

(1) *Para* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$. (propiedad asociativa)

(2) *Para* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n = n \cdot m$. (propiedad conmutativa)

(3) *Para* $m \in \mathbb{N}$, $m \cdot 1 = m$. (existencia de elemento neutro)

(4) *Para* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $r \cdot (m + n) = r \cdot m + r \cdot n$. (distribución del producto respecto a la suma)

(5) *Para* $m, n, r \in \mathbb{N}$, $(r \cdot m = r \cdot n \ y \ r \neq 0 \ \Rightarrow m = n)$. (ley de cancelación para el producto)

Demostración.

(3) $m \cdot 1 = m \cdot 0' = m \cdot 0 + m = m$.

(4) Sean m y r fijos y sea $T = \{n \in \mathbb{N} \mid r \cdot (m+n) = r \cdot m + r \cdot n\} \subseteq \mathbb{N}$. Demostraremos que $T = \mathbb{N}$ usando (c) de la definición de Sistema de Peano.

$1°/\ 0 \in T$ ya que $r \cdot (m + 0) = r \cdot m = r \cdot m + 0 = r \cdot m + r \cdot 0$.

$2°/$ Supongamos que $n \in T$. Entonces

$r \cdot (m + n') = r \cdot (m + n)' = r \cdot (m + n) + r = (r \cdot m + r \cdot n) + r = r \cdot m + (r \cdot n + r) = r \cdot m + r \cdot n'$

Dejamos como ejercicio la demostración de (1), (2) y (5). ■

Definimos ahora una relación de orden en un Sistema de Peano.

Definición 3.5.3. *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *un Sistema de Peano. Dados* $m, n \in \mathbb{N}$, *diremos que* $n < m$ *si existe* $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ *tal que* $n + r = m$.

En el caso en que se use $\leq$, tendremos que $n \leq m$ si y sólo si existe $r \in \mathbb{N}$ (ya no pedimos $r \neq 0$) tal que $n + r = m$.

***Teorema* 3.5.13.** *Sea* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *un Sistema de Peano.* $<$ *es un orden parcial en* $\mathbb{N}$.

Demostración.

(1) $a \not< a$, ya que si existiera $r \in \mathbb{N}$ tal que $a + r = a$, entonces $a + r = a + 0$, lo que implica, por el Teorema 3.5.9, que $r = 0$.

(2) Si $a < b$ y $b < c$ entonces, por definición existen $r_1, r_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$ tales que $a + r_1 = b$ y $b + r_2 = c$, Entonces $a + (r_1 + r_2) = (a + r_1) + r_2 = b + r_2 = c$, y como $(r_1 + r_2) \neq 0$ (ver Ejercicio 3.36), entonces $a < c$. ■

***Proposición* 3.5.14.** *Si* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *es un Sistema de Peano, entonces* $n < n'$ *y* $0 \leq n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

La demostración se deja como ejercicio al lector.

***Teorema* 3.5.15.** *El orden* $<$ *definido en un Sistema de Peano* $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ *es total.*

Demostración. Sea $T = \{m \in \mathbb{N} | \forall\ n,\ n \neq m \Rightarrow\ n < m \text{ o } m < n)\}$. Demostremos que $T = \mathbb{N}$ haciendo uso de (c) de la definición de Sistema de Peano.

$1°/\ 0 \in T$ por la Proposición 3.5.14.

$2°/$ Supongamos que $m \in T$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq m'$.

Si $n = m$ entonces, por la Proposición 3.5.14, $n < n' = m'$.

Si $n \neq m$, como $m \in T$, entonces $n < m$ o $m < n$. Analicemos estos dos casos

(a) Si $n < m$, por ser $m < m'$, entonces $n < m'$.

(b) Si $m < n$, entonces existe $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tal que $m + r = n$ y por ser $r \neq 0$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $q' = r$, esto es $q + 1 = r$. Entonces

$$n = m + r = m + (q + 1) = (m + 1) + q = m' + q.$$

Como por hipótesis $n \neq m'$, entonces $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ y por lo tanto $m' < n$.

Hemos demostrado que si $n \neq m'$, entonces $n < m'$ o $m' < n$. Luego $m' \in T$ y así $T = \mathbb{N}$. ■

Recordemos que $n' = n + 1$.

De aquí en adelante denotaremos por $\mathbb{N}$ a un Sistema de Peano y por 0 a su elemento distinguido.

***Proposición* 3.5.16.** *Para todo* $x \in \mathbb{N}$, *si* $n \leq x \leq n + 1$ *entonces* $x = n$ *o* $x = n + 1$.

Demostración. Supongamos que $n < x$. Probaremos que $x = n + 1$.

Como $n < x$, existe $r \in \mathbb{N}$, $r \neq 0$ tal que $n + r = x$.

Sea $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r = r_0 + 1$. Entonces $x = n + (r_0 + 1) = (n + 1) + r_0$. Por lo que, por definición de orden, $n + 1 \leq x$. Pero también tenemos, por hipótesis, que $x \leq n + 1$. Por lo tanto $x = n + 1$. ■

***Teorema* 3.5.17.** *El orden* $\leq$ *en* $\mathbb{N}$ *es un buen orden.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \varnothing$ y supongamos que A no tiene mínimo.

Sea $T = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall\ a \in A\ x < a\}$. $T \subseteq \mathbb{N} - A \subsetneq \mathbb{N}$.

Utilizando (c) de la definición de Sistema de Peano, probaremos que $T = \mathbb{N}$, lo que será un absurdo ya que T es un subconjunto propio de $\mathbb{N}$.

$1°/$ $0 \in T$, ya que $0 \leq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ (Proposición 3.5.14), y 0 no puede ser elemento de A pues, por hipótesis, A no tiene mínimo.

$2°/$ Supongamos que $n \in T$. Entonces $n < a \ \forall \ a \in A$ y por lo tanto $n + 1 \leq a \ \forall \ a \in A$.

Si $n + 1 = a$ para alguna $a \in A$ entonces $n + 1$ sería el mínimo de A contradiciendo la hipótesis, así que $n + 1 < a \ \forall \ a \in A$ y por lo tanto $n + 1 \in T$. Entonces $T = \mathbb{N}$, y como ya hemos dicho, esto no puede ser. Por lo tanto A debe tener mínimo. ■

***Teorema* 3.5.18.** *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}$ es finito.*

Demostración. Sea $T = \{n \in \mathbb{N} | I_n \text{ es finito}\}$. T satisface
(a) $0 \in T$ ya que $I_0 = \{x \in \mathbb{N} | x < 0\} = \varnothing$ es finito.
(b) Supongamos que $n \in T$, es decir, I_n es finito. Si $x < n' = n + 1$, entonces $x < n$ o $x = n$, ya que por la Proposición 3.5.16 no existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$. Entonces

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \{x \in \mathbb{N} | x < n + 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x < n \text{ o } x = n\} \\ &= \{x \in \mathbb{N} | x < n\} \cup \{n\} = I_n \cup \{n\}. \end{aligned}$$

Pero por hipótesis I_n es finito lo que, por (3) del Teorema 3.3.2, implica que I_{n+1} es finito. Por lo tanto $n + 1 \in T$. Entonces $T = \mathbb{N}$. ■

Ya hemos demostrado que cualesquiera dos Sistemas de Peano son isomorfos, en particular cualquier Sistema de Peano es isomorfo a $(\mathbb{F}, (\ )', 0)$, donde $\mathbb{F}$ es el conjunto de los cardinales finitos. En el teorema siguiente damos explícitamente este isomorfismo.

***Teorema* 3.5.19.** *Sea $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ un Sistema de Peano, y $\mathbb{F}$ el conjunto de cardinales finitos. Entonces la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{F}$ dada por*

$$f(n) = |\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}|$$

es un isomorfismo de $(\mathbb{N}, (\ )', 0)$ sobre $(\mathbb{F}, (\ )', 0)$.

Demostración. $1°/$ f es inyectiva

Si $n \neq m$, entonces $n < m$ o $m < n$. Supongamos $n < m$. Entonces $I_n = \{x \in \mathbb{N} \mid x < n\} \subsetneq \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\} = I_m$ ya que claramente $I_n \subseteq I_m$ y además $n \in I_m$ y $n \notin I_n$. Por lo tanto por ser I_n e I_m finitos

$$|\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}| < |\{x \in \mathbb{N} \mid x < m\}|,$$

lo que significa que $f(n) \neq f(m)$.

$2^{\circ}/$ f es suprayectiva

Sea $T = Im(f)$. Probaremos que $T = \mathbb{F}$.

(i) $0 \in T$ ya que $f(0) = |\{x \in \mathbb{N} \mid x < 0\}| = |\varnothing| = 0$. (Recordemos que $0 \leq n$ para toda $n \in \mathbb{N}$)

(ii) Supongamos que $c \in T$. Probaremos que $c + 1 \in T$.

Como $c \in T$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = c$. Entonces

$$\begin{aligned} f(n') &= |\{x \in \mathbb{N} \mid x < n'\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\} \cup \{n\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{N} \mid x < n\}| + |\{n\}| \\ &= c + 1. \end{aligned}$$

Esto es, $c + 1 \in T$. Por lo tanto $T = \mathbb{F}$ y entonces f es suprayectiva.

Finalmente de **(i)** y **(ii)** observemos que $f(0)=0$ y $f(n')=f(n) + 1= f(n)'$. Por lo tanto f es un isomorfismo. ■

De este teorema se desprenden los siguientes corolarios. Las demostraciones se dejan como ejercicios al lector.

***Corolario* 3.5.20.** *Si $n \in \mathbb{F}$, entonces $|\{x \in \mathbb{F} \mid x < n\}| = n$.*

***Corolario* 3.5.21.** *Un conjunto A es finito si y sólo si existe $n \in \mathbb{F}$ tal que $A \sim \{x \in \mathbb{F} \mid x < n\}$.*

Por último, a cada elemento de un Sistema de Peano lo llamaremos un número natural, así que, el conjunto de los números naturales será cualquier Sistema de Peano.

§ 3.6 Ejercicios

3.1. Demostrar las siguientes afirmaciones

1. $|\varnothing| \leq |A|$.
2. Si $|A| \leq |\varnothing|$, entonces $A = \varnothing$.
3. Si $A \subseteq B$, entonces $|A| \leq |B|$.
4. $|A| \leq |\mathscr{P}(A)|$. ¿Puede ser que $|A| = |\mathscr{P}(A)|$, para algún conjunto A?
5. $|A| \leq |A \times A|$ para cualquier conjunto A.
6. Si $B \neq \varnothing$, entonces $|A| \leq |A \times B|$. ¿Qué puede decir en el caso $B = \varnothing$?
7. Sean A y B conjuntos. Entonces $|A| \leq |B|$ si y sólo si existe una función suprayectiva de B en A.

3.2. Demostrar que si $|A| \leq |B|$ entonces $|\mathscr{P}(A)| \leq |\mathscr{P}(B)|$.

3.3. Complete la demostración de la Proposición 3.2.2, estableciendo las biyecciones mencionadas.

3.4. Complete la demostración de la Proposición 3.2.4, mostrando las igualdades de los conjuntos propuestos.

3.5. Complete la prueba de la Proposición 3.2.6, estableciendo las biyecciones necesarias en cada caso.

3.6. Compruebe que la función dada en la demostración de la Proposición 3.2.7 es biyectiva.

3.7. Demuestre la Proposición 3.2.8.

3.8. Demuestre las equivalencias (1), (1′) y (2), (2′) del Teorema 3.3.3.

3.9. Demuestre que un conjunto A es finito si y sólo si para todo subconjunto propio B de A no existe una función inyectiva de A en B.

3.10. Demuestre el Corolario 3.3.4.

3.11. Demuestre el Teorema 3.3.6.

3.12. Si A es finito y $f : A \longrightarrow B$ es suprayectiva entonces B es finito.

3.13. Demuestre los Corolarios 3.3.7, 3.3.13, 3.3.15, 3.4.3 y 3.4.8.

3.14. Complete la demostración del Corolario 3.4.6 verificando que

$$\aleph_0 \leq \aleph_0 + \aleph_0.$$

3.15. Demostrar que si n y m son cardinales donde al menos uno de ellos es infinito, entonces $n + m = n \cdot m$.

3.16. Sean α, β y γ cardinales tales que $\alpha = \beta + \gamma$. Demostrar que $\gamma \leq \alpha$.

3.17. Demuestre que la función f_X dada en la demostración del Teorema 3.4.5 es biyectiva y que (X, f_X, Y) es cota superior de la cadena C.

3.18. Demuestre la Proposición 3.4.11.

3.19. Demuestre el Corolario 3.4.16.

3.20. Demostrar que si a es un cardinal infinito y b es un cardinal finito, entonces $a^b = a$.

3.21. Sean a, b y c cardinales. Demostrar que

1. Si $a \leq b$, entonces $a^c \leq b^c$, ¿Cuándo se da la igualdad?
2. Si $b \leq c$, entonces $a^b \leq a^c$

3.22. Sean $\{a_i\}_{i \in I}$ y $\{b_i\}_{i \in I}$ dos familias de números cardinales tales que para cada $i \in I$, $a_i < b_i$. Demostrar que $\sum_{i \in I} a_i < \sum_{i \in I} b_i$.

3.23. Sean α y β cardinales tales que β es infinito y $2 \leq \alpha \leq 2^\beta$. Demostrar que $\alpha^\beta = 2^\beta$

3.24. Sean α, β y γ cardinales tales que β y γ son infinitos, $\alpha = 2^\beta$ y $2^\gamma \leq \alpha$. Demostrar que $\alpha^\gamma = \alpha$. (*Sugerencia: Utilizar la fórmula del producto para cardinales infinitos.*)

3.25. Si $f : A \longrightarrow B$ es una función, la gráfica de f es el subconjunto $\{(a, f(a)) | a \in A\}$ de $A \times B$.

1. Probar que la función $G_f : A \longrightarrow A \times B$, definida por $G_f(a) = (a, f(a))$ es una biyección de A sobre la gráfica de f.
2. Sean A y B conjuntos de cardinalidad α y β respectivamente, tal que β es infinito y $\alpha \leq \beta$. Demostrar que el cardinal γ del conjunto de funciones inyectivas de A en B es β^α. (*Sugerencia: Pruebe que $\gamma \leq \beta^\alpha$ usando la parte* (1)*, la otra desigualdad es trivial.*)

3.26. Sea A un conjunto de cardinalidad infinita α . Pruebe que el número de funciones biyectivas de A en sí mismo es 2^α. (*Sugerencia: Establezca que α^α es cota superior, use el Ejercicio 3.23 y exhiba 2^α biyecciones, expresando A como la unión ajena de dos subconjuntos, ambos de cardinalidad α y observe que las funciones inyectivas, de uno de ellos en el otro*

pueden ser extendidas a una función biyectiva de A en A y finalmente use el Ejercicio 3.25 (2)).

3.27. Sea X una retícula (véase la definición en el Ejercicio 1.53) en la cual cada cadena tiene una cota superior. Probar que X tiene un único elemento maximal.

3.28. Sea X una retícula en la cual cada cadena tiene supremo e ínfimo en X. Probar que X es completa (Para la definición de retícula completa, véase el Ejercicio 1.54).

3.29. Dados los cardinales α y β, estudie las soluciones γ de $\alpha \cdot \gamma = \beta$.

3.30. Demostrar que si A es numerable, entonces $\{X \subseteq A \mid X \text{ es finito}\}$ es numerable.

3.31. Demostrar que si cada subconjunto numerable de un conjunto totalmente ordenado X es bien ordenado, entonces X es bien ordenado.

3.32. Sea $|A| = \alpha$. ¿Cual es la cardinalidad de $\{f : A \longrightarrow A | f \text{ es biyectiva}\}$?

3.33. Sea $|A| = \alpha$. ¿Cual es la cardinalidad de $\{X \subseteq A \mid X \text{ es numerable}\}$?

3.34. Demuestre que la función $g : A_n \longrightarrow A_m$ definida en la §3.4 página 68 es biyectiva.

3.35. Demostrar que el producto que se definió para cardinales finitos es el mismo que el que se definió para un Sistema de Peano.

3.36. Demostrar que si $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ y $r_1 \neq 0$ ó $r_2 \neq 0$, entonces $r_1 + r_2 \neq 0$.

3.37. Demostrar, usando el Teorema de Recursión, que el producto de cardinales finitos es conmutativo.

3.38. Complete la demostración del Corolario 3.5.2.

3.39. En cada uno de los siguientes casos demostrar que el conjunto $\mathfrak{A}$ dado es numerable.

1. Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} | \ |A| = n\}$,
2. $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} | A \text{ es finito}\}$.

3.40. Demostrar que $\{A \subseteq \mathbb{N} | A \text{ es infinito}\}$ no es numerable.

3.41. Sean A y B conjuntos finitos de cardinalidad n y m respectivamente.

1. Probar que $\mathscr{P}(A)$ es de cardinalidad 2^n,
2. Dedúzcase del inciso anterior que no existe un conjunto cuyo conjunto potencia es numerable,

3. Probar que la cardinalidad del conjunto de funciones de A en B es m^n,
4. Probar que si $n \leq m$, entonces la cardinalidad del conjunto de funciones inyectivas de A en B es $\frac{m!}{(n-m)!}$.

3.42. Sea A un conjunto de cardinalidad n y $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ fijo. Sean $k_1 \ldots, k_r \in \mathbb{N} - \{0\}$ tales que $k_1 + \cdots + k_r = n$. Probar que la cardinalidad del conjunto de particiones de A en r subconjuntos $A_{k_1}, \ldots, A_{k_r}$ de cardinalidad $k_1 \ldots, k_r$ respectivamente es $\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$.

3.43. Demuestre los incisos (2) y (3) del Teorema 3.5.9.

3.44. Demuestre los incisos (1), (2) y (5) del Teorema 3.5.12.

3.45. Demuestre la Proposición 3.5.14.

3.46. Demostrar que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$

3.47. Demuestre los Corolarios 3.5.20 y 3.5.21.

3.48. Sea A un conjunto infinito. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, A contiene un subconjunto B tal que $|B| = n$.

Capítulo 4

Números ordinales

§ 4.1 Conjuntos bien ordenados

En este capítulo estudiaremos los conjuntos bien ordenados.

Observación 4.3. Si $(A, <_A)$ es un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$, denotaremos por $<_A |_B$ al orden de A restringido a B. Sin embargo, por comodidad y cuando no haya confusión continuaremos usando $<_A$ en vez de $<_A |_B$.

Definición 4.1.1. *Dado un conjunto bien ordenado $(A, <_A)$ y $a \in A$, **el segmento inicial** de A determinado por a es el conjunto*

$$A_a = \{x \in A \mid x <_A a\}.$$

***Proposición* 4.1.1.** *$(A_a, <_A)$ es un conjunto bien ordenado.*
Demostración. Ejercicio 1.59. ■

Ejemplo 4.1.1.
(1) Sean $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado, consideremos $a = \text{mín}_{<_A} A$ y $b = \text{mín}_{<_A}(A - \{a\})$. Entonces $A_a = \varnothing$ y $A_b = \{a\}$.
(2) Si $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales con el orden usual y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathbb{N}_n = \{0, 1, 2, ..., n\}$.

***Proposición* 4.1.2.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado.*
(a) Si $a \in A$ y $b <_A a$ entonces $(A_a)_b = A_b$, es decir, el segmento inicial de A_a, determinado por b coincide con le segmento inicial de A determinado por b.
(b) Para cualesquiera elementos $a, a' \in A$, $a <_A a'$ si y sólo si $A_a \subset A_{a'}$.

Demostración.
(a) $1^o/$ $x \in (A_a)_b$ implica que $x \in A_a$ y $x <_A b$, y como $A_a \subsetneq A$ ya que $a \notin A_a$, entonces $x \in A$ y $x <_A b$, por lo que $x \in A_b$.

$2^o/\ x \in A_b$ implica que $x \in A$ y $x <_A b$. Como $b <_A a$, por hipótesis, entonces $x <_A a$, por lo que $x \in A_a$ y así $x \in (A_a)_b$.

(b) Se deja como ejercicio al lector. ■

***Teorema* 4.1.3.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $B \subseteq A$. Son equivalentes*

$(a)\ \forall\ b \in B\ \forall\ x \in A\ (x < b \Rightarrow x \in B)$.

$(b)\ B = A\ \ ó\ \ \exists\ a \in A\ (B = A_a)$.

Demostración.

$(b) \Rightarrow (a)$ Se deja como ejercicio al lector.

$(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que $A - B \neq \varnothing$ y sea $a = \text{mín}_{<_A}(A - B)$. Demostraremos que $B = A_a$.

Es claro que $A_a \subseteq B$, por ser a el mínimo de $A - B$.

Inversamente, sea $x \in B$ y supóngase que $a < x$ ($a \neq x$ ya que $a \notin B$). Por hipótesis, se debe tener $a \in B$, lo que es imposible ya que $a \notin B$, luego $x < a$ y por lo tanto $x \in A_a$. ■

***Teorema* 4.1.4. *Principio de Inducción Transfinita*.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $T \subseteq A$. Si para cada $a \in A$ se tiene que es verdadero que $A_a \subseteq T$ implica $a \in T$, entonces $T = A$.*

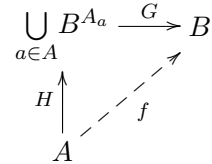
Demostración. Supongamos que $T \neq A$ y sea $z = \text{mín}_{<_A}(A - T)$.

Entonces, $A_z \subseteq T$, pero por hipótesis esto implica que $z \in T$, lo que es una contradicción ya que $z \in (A - T)$. Por lo tanto $A = T$. ■

Teorema* 4.1.5. *Teorema de Recursión Transfinita. *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado, B un conjunto arbitrario y*

$$G : \bigcup_{a \in A} B^{A_a} \longrightarrow B$$

una función. Entonces existe una única función $f : A \to B$ que hace conmutativo el siguiente diagrama



donde $H : A \longrightarrow \bigcup_{a \in A} B^{A_a}$ es la función dada por $H(a) = f|_{A_a}$; es decir, para toda $a \in A$, f satisface que $f(a) = G(f|_{A_a})$, donde $f|_{A_a}$ es la función f restringida a A_a.

Demostración.

Existencia. Sea $T \subseteq A$ el conjunto que consta de todos los elementos $x \in A$ tales que existe una única función $f_x : \{y \in A \mid y \leq x\} \longrightarrow B$ que satisface $f_x(y) = G(f_x|_{A_y})$ para todo $y \leq x$.

Supongamos que $A_a \subseteq T$. Demostraremos que $a \in T$ y por el Principio de Inducción Transfinita tendremos entonces que $T = A$, con lo que quedaría demostrada la existencia de f del teorema.

Para esto observemos que para $x, z \in A_a$ $(\subseteq T)$, con $x \leq z$, por la unicidad de las funciones f_x y f_z se debe tener que $f_z \mid_{\{y \in A \mid y \leq x\}} = f_x$, así que si tal función única f_a existiese, entonces $f_a \mid_{\{y \in A \mid y \leq x\}} = f_x$ para todo $x < a$. Esto nos da la idea de que para definir la función f_a es suficiente definirla en a, ya que para las $x < a$ debe coincidir con f_x. Para definirla en a debemos tomar en cuenta que debe satisfacer la condición requerida. Definamos pues $f_a : \{y \in A \mid y \leq a\} \longrightarrow B$ como sigue

$$f_a(x) = \begin{cases} f_x(x) & \text{si } x < a \\ \\ G(f_a|_{A_a}) & \text{si } x = a \end{cases}$$

Evidentemente esta función satisface la condición requerida para que $a \in T$ y por lo tanto $T = A$. Definimos entonces la función buscada, $f : A \longrightarrow B$ como $f = \bigcup_{x \in A} f_x$, donde

$$f(a) = \left(\bigcup_{x \in A} f_x \right)(a) = f_a(a)$$

y

$$f(a) = f_a(a) = G(f_a|_{A_a}) = G(f|_{A_a}) \text{para toda} a \in A.$$

Unicidad. Supongamos que f y g son dos funciones de A en B que satisfacen $f(a) = G(f|_{A_a})$ y $g(a) = G(g|_{A_a})$ para toda $a \in A$ y sea $T = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$. Mostraremos que $T = A$ aplicando Inducción Transfinita.

Supongamos que $A_a \subseteq T$. Entonces $f|_{A_a} = g|_{A_a}$ y esto implica que $G(f|_{A_a}) = G(g|_{A_a})$, lo que significa $f(a) = g(a)$ y por lo tanto $a \in T$. ■

Definición 4.1.2. *Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$, conjuntos bien ordenados. Una función $f : A \longrightarrow B$* ***preserva el orden*** *si $a <_A a'$ implica $f(a) <_B f(a')$.*

Definición 4.1.3. *Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$, conjuntos bien ordenados. Diremos que $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ son* ***isomorfos*** *(o* ***semejantes****, o* ***del mismo tipo de orden****), y lo denotaremos por $(A, <_A) \cong (B, <_B)$, si existe una función biyectiva $f : A \longrightarrow B$ que preserva el orden.*

***Proposición* 4.1.6.** *La relación de isomorfismo entre conjuntos bien ordenados es reflexiva, simétrica y transitiva.*

Demostración. Ejercicio 4.1. ■

***Proposición* 4.1.7.** *Si $f : (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados entonces $f^{-1} : (B, <_B) \longrightarrow (A, <_A)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados.*

Demostración. Ejercicio 4.2. ■

***Proposición* 4.1.8.** *Si $f : (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados y $a \in A$, entonces $(A_a, <_A) \cong (B_{f(a)}, <_B)$.*

Demostración. Sea $a \in A$ Demostraremos que $f \mid_{A_a}$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados sobre $B_{f(a)}$.
Para cada $x \in A_a$, $f(x) \in B_{f(a)}$ ya que, por hipótesis, f preserva el orden.
f es inyectiva, pues es la restricción de una función inyectiva.
Como f es suprayectiva, para cada $y \in B_{f(a)}$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sólo tenemos que demostrar que $x \in A_a$. Si $x \geq a$ entonces $y = f(x) \geq f(a)$, lo que no puede suceder, ya que $y \in B_{f(a)}$. Por lo tanto $x < a$. ■

***Teorema* 4.1.9.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $f : A \longrightarrow A$ una función que preserva el orden. Entonces $a \leq f(a)$ para cada $a \in A$.*

Demostración. Sea $S = \{x \in A \mid x > f(x)\}$ y supongamos que $S \neq \varnothing$. Por ser A un conjunto bien ordenado, S tiene un mínimo z. Entonces $z > f(z)$. Por otro lado como f preserva orden, $f(z) > f(f(z))$ lo cual implica que $f(z) \in S$ lo que es imposible pues z es el mínimo de S. Por lo tanto $S = \varnothing$ y entonces $x \leq f(x)$ para toda $x \in A$. ■

***Corolario* 4.1.10.** *Si $f, g : (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ son isomorfismos de conjuntos bien ordenados entonces $f = g$. Esto es, si $(A, <_A) \cong (B, <_B)$ entonces existe un único isomorfismo de $(A, <_A)$ en $(B, <_B)$.*

Demostración. La función $g^{-1} \circ f : (A, <_A) \longrightarrow (A, <_A)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados (ejercicio 4.3) y por lo tanto respeta el orden y por el Teorema 4.1.9, $x \leq g^{-1} \circ f(x)$ para todo $x \in A$, y nuevamente como g preserva el orden, $g(x) \leq f(x)$. Análogamente se demuestra la otra desigualdad considerando la función $f^{-1} \circ g$. ■

***Corolario* 4.1.11.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado. Para cualquier $a \in A$ no puede existir un isomorfismo de conjuntos bien ordenados de $(A, <_A)$ en $(A_a, <_A)$.*

Demostración. Supongamos que para alguna $a \in A$, la función $f : (A, <_A) \longrightarrow (A_a, <_A)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados. Entonces por el Teorema 4.1.9 $a \leq f(a)$, pero por otro lado, como $f(a) \in A_a$ entonces $f(a) < a$ lo que es una contradicción. Por lo tanto no puede existir tal isomorfismo. ■

***Corolario* 4.1.12.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $a, a' \in A$. Si existe un isomorfismo de conjuntos bien ordenados de $(A_a, <_A)$ en $(A_{a'}, <_A)$ entonces $a = a'$.*

Demostración. Supongamos $a < a'$. Entonces por (a) de la Proposición 4.1.2 tenemos que $(A_{a'})_a = A_a$ y por lo tanto tendríamos que $((A_{a'})_a, <_A) \cong (A_{a'}, <_A)$ lo que es imposible debido al Corolario 4.1.11. ■

***Proposición* 4.1.13.** *Si $(A, <_A)$ es un conjunto bien ordenado, entonces $(\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq)$ es un conjunto bien ordenado y*

$$(A, <_A) \cong (\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq).$$

Demostración. Que $(\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq)$ es un conjunto bien ordenado es consecuencia inmediata de (b) de la Proposición 4.1.2.
La función $f : A \longrightarrow (\{A_a \mid a \in A\}, \subseteq)$ dada por $f(a) = A_a$ es claramente un isomorfismo de conjuntos bien ordenados. ■

***Teorema* 4.1.14.** *Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ conjuntos bien ordenados. Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones*
(1) *Existe un isomorfismo de conjuntos bien ordenados de $(A, <_A)$ en $(B, <_B)$.*
(2) *Existe $b \in B$ tal que existe un isomorfismo de conjuntos bien ordenados de $(A, <_A)$ en $(B_b, <_B)$.*
(3) *Existe $a \in A$ tal que existe un isomorfismo de conjuntos bien ordenados de $(A_a, <_A)$ en $(B, <_B)$.*

Demostración. Sea $A' = \{a \in A \mid \exists b \in B\ (A_a, <_A) \cong (B_b, <_B)\}$. Definimos $f : A' \longrightarrow B$ por $f(a) = b$ donde $(A_a, <_A) \cong (B_b, <_B)$

$1^o/$ f está bien definida y es inyectiva, ya que por el Corolario 4.1.12, $(B_b, <_B) \cong (B_{b'}, <_B)$ si y sólo si $b = b'$.

$2^o/$ f preserva el orden. Sean $a < a'$ en A', y $h : (A_a, <_A) \cong (B_{f(a)}, <_B)$ y $g : (A_{a'}, <_A) \cong (B_{f(a')}, <_B)$ isomorfismos de conjuntos bien ordenados. Entonces $A_a \subsetneq A_{a'}$ y así $g(a) < f(a')$. Por otro lado, debido a la Proposición 4.1.8, $g|_{A_a} : A_a \longrightarrow ((B_{f(a')})_{g(a)}, <_B)$ es un isomorfismo, donde $(B_{f(a')})_{g(a)} = B_{g(a)}$ por la Proposición 4.1.2. Por lo tanto se tiene que

$$(B_{f(a)}, <_B) \overset{f^{-1}}{\cong} (A_a, <_A) \overset{g|_{A_a}}{\cong} (B_{g(a)}, <_B)$$

lo cual implica, por el Corolario 4.1.12, que $f(a) = g(a)$ y de aquí se tiene entonces que $f(a) < f(a')$ y así f preserva el orden.

Demostraremos ahora que $A' = A$ ó $A' = A_a$ para algún $a \in A$ y que $f(A') = B$ ó $f(A') = B_b$ para algún $b \in B$. Para esto es suficiente demostrar, haciendo uso del Teorema 4.1.3, que

$$\forall\ a \in A'\ \forall\ x \in A\ (x < a \Longrightarrow x \in A').$$

Sean $a \in A'$ y $x \in A$ con $x < a$. Entonces por ser a elemento de A' existe un isomorfismo $g : (A_a, <_A) \longrightarrow (B_b, <_b)$ para algún $b \in B$. Como $x \in A_a$, por la Proposición 4.1.8

$$(A_x, <_A) \cong ((B_b)_{g(x)}, <_B) = (B_{g(x)}, <_B),$$

este último isomorfismo nos dice entonces que $x \in A'$. Por lo tanto $A' = A$ o $A' = A_a$ para alguna $a \in A$.

Análogamente, usando el mismo argumento se demuestra que $f(A') = B$ o $f(A') = B_b$ para algún $b \in B$.

Debido a lo anterior, se pueden presentar 4 posibilidades, que son
(i) $A' = A$ y $f(A') = B$,
(ii) $A' = A$ y $f(A') = B_b$, para algún $b \in B$,
(iii) $A' = A_a$ y $f(A') = B$, para algún $a \in A$,
(iv) $A' = A_a$ y $f(A') = B_b$, para algún $a \in A$ y para algún $b \in B$.

Pero la última posibilidad no puede suceder ya que en este caso se tendría que $(A_a, <_A) = (A', <_A) \cong (f(A'), <_B) = (B_b, <_B)$ y esto implicaría que $a \in A' = A_a$ lo cual es evidentemente un absurdo.

Por lo tanto sólo puede darse una de las tres primeras y es claro que solamente una de ellas se cumple. ■

Como hicimos para los números cardinales, introducimos los números ordinales, a la manera de Tarski, mediante los siguientes axiomas

1. *Cada conjunto bien ordenado está asociado con un objeto, el cual es su* ***número ordinal****.*
2. *Dos conjuntos bien ordenados son isomorfos (del mismo tipo de orden) si y sólo si tienen el mismo número ordinal.*

Al ordinal de un conjunto bien ordenado $(A, <_A)$ lo denotaremos por $\mathbf{ord}(\mathbf{A}, <_\mathbf{A})$.

Usando este concepto de número ordinal, desarrollaremos la teoría de números ordinales.

De aquí en adelante, cuando escribamos $\alpha = ord(A, <_A)$, se dará por hecho que $(A, <_A)$ es un conjunto bien ordenado. Como en cardinales, definimos a continuación un **orden sobre ordinales**.

Definición 4.1.4. *Sean $\alpha = ord(A, <_A)$ y $\beta = ord(B, <_B)$. Diremos que el ordinal α* ***es menor que el ordinal*** *β, y lo denotaremos por $\boldsymbol{\alpha < \beta}$, si existe $b \in B$ tal que $(A, <_A) \cong (B_b, <_B)$.*

Como hemos definido el orden entre los números ordinales en función de un representante, como en el caso de cardinales debemos demostrar que no depende del representante elegido, esto es,

Proposición **4.1.15.** *Si $(A, <_A) \cong (A', <_{A'})$ y $(B, <_B) \cong (B', <_{B'})$, entonces $(A, <_A) \cong (B_b, <_B)$ para algún $b \in B$ si y sólo si $(A', <_{A'}) \cong (B'_{b'}, <_{B'})$ para algún $b' \in B'$.*

Demostración. Esto resulta del hecho de que si $g : (B, <_B) \to (B', <_{B'})$ es un isomorfismo, entonces por la Proposición 4.1.8, para toda $b \in B$ se tiene que $(B_b, <_B) \cong (B'_{g(b)}, <_{B'})$. Entonces

$$(A', <_{A'}) \cong (A, <_A) \cong (B_b, <_B) \cong (B'_{g(b)}, <_{B'}). \blacksquare$$

Observación 4.4. Como estamos trabajando con conjuntos bien ordenados, y entre estos hemos definido un orden, para evitar confusiones cuando trabajemos con el orden de un conjunto, lo denotaremos como lo hemos venido haciendo, con el subíndice del conjunto, de tal manera que cuando aparezca $<$ (sin subíndice) nos estaremos refiriendo al orden de los ordinales que acabamos de definir.

***Teorema* 4.1.16.** *$<$ es un orden total.*

Demostración.
$1^o/ <$ es un orden.
(i) Por el Corolario 4.1.11, $(A, <_A)$ no puede ser isomorfo a $(A_a, <_A)$ para toda $a \in A$, por lo que para cualquier ordinal α, $\alpha \not< \alpha$.
(ii) Sean $\alpha = ord(A, <_A)$, $\beta = ord(B, <_B)$ y $\gamma = ord(C, <_C)$ con $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$.
Existen $b \in B$ y $c \in C$ tales que $f : (A, <_A) \longrightarrow (B_b, <_B)$ y $g : (B, <_B) \longrightarrow (C_c, <_C)$ son isomorfismos de conjuntos bien ordenados. Entonces $g \circ f : (A, <_A) \longrightarrow (C_{g(b)}, <_C)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados y por lo tanto $\alpha < \gamma$.

$2^o/ <$ es un orden total
Es una consecuencia inmediata del Teorema 4.1.14 ■

***Teorema* 4.1.17.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado, $<_B$ un orden total en un conjunto B y $f : A \longrightarrow B$ una función biyectiva que preserva el orden. Entonces $<_B$ es un buen orden en B.*

Demostración. Sea $S \subseteq B$ y $S \neq \varnothing$. Mostraremos que S tiene elemento mínimo.
Como $S \neq \varnothing$ y f es biyectiva, entonces $\varnothing \neq f^{-1}(S) \subseteq A$ y por ser $<_A$ un buen orden, $f^{-1}(S)$ tiene elemento mínimo z.
Afirmamos que $f(z)$ es el elemento mínimo de S.
Sea $b \in S$, por ser f supreyectiva $b = f(a)$ para alguna $a \in A$. Entonces $a \in f^{-1}(S)$, por lo que $z \leq a$, y como f preserva el orden, $f(z) \leq f(a) = b$.
Por lo tanto $f(z)$ es el mínimo de S. ■

Para cada ordinal $\alpha = ord\,(A, <_A)$, denotaremos por $W\,(\alpha)$ al conjunto

$$\boldsymbol{W(\alpha) = \{\beta \mid \beta \text{ es un ordinal y } \beta < \alpha\}}$$

Nota 14. $W(\alpha)$ es un conjunto, ya que si $\beta = ord(B, <_B) < \alpha$, entonces $(B, <_B) \cong (A_a, <_A)$ para alguna $a \in A$, lo que significa que B es equipotente con un subconjunto de A.

***Teorema* 4.1.18.** *Sea $\alpha = ord(A, <_A)$. Entonces $(W(\alpha), <)$ es un conjunto bien ordenado y $ord(W(\alpha), <) = \alpha$.*

Demostración. Sea $F : (A, <_A) \longrightarrow (W(\alpha), <)$ definida por $F(a) = ord(A_a, <_A)$.
$1^o/$ F preserva el orden (y por tanto es inyectiva)
Sean $a, b \in A$ con $a < b$. Por (b) de la Proposición 4.1.2, $A_a \subsetneq A_b$. Esto implica, por el Corolario 4.1.12, que $A_a \ncong A_b$ y como $(A_a, <_A) = ((A_b)_a, <_A)$, entonces $F(a) = ord(A_a, <_A) < ord(A_b, <_A) = F(b)$.
$2^o/$ F es suprayectiva
Sea $\beta \in W(\alpha)$ y $\beta = ord(B, <_B)$. Como $\beta < \alpha$, existe $a \in A$ tal que $(B, <_B) \cong (A_a, <_A)$
Entonces $F(a) = \beta$.
Por el Teorema 4.1.17, $(W(\alpha), <)$ es bien ordenado y entonces $(A, <_A) \cong (W(\alpha), <)$. ■

***Teorema* 4.1.19.** *Cada conjunto no vacío de ordinales tiene elemento mínimo.*

Demostración. Sea C un conjunto no vacío de ordinales y sea $\gamma \in C$.
Si $W(\gamma) \cap C = \varnothing$, entonces evidentemente γ es el mínimo de C.
Supongamos que $W(\gamma) \cap C \neq \varnothing$. Como $W(\gamma)$ es un conjunto bien ordenado (Teorema 4.1.18), entonces $W(\gamma) \cap C$ tiene elemento mínimo, el cual claramente es también el mínimo de C. ■

Generalmente en un conjunto se pueden definir varios buenos órdenes que no son isomorfos entre sí, como se puede ver en la Nota 16 de la página 96. Sin embargo para el caso de un conjunto finito, sólo existe un buen orden, salvo isomorfismos, como lo muestra el siguiente

***Teorema* 4.1.20.** *Sea A un conjunto finito y $<_1$, $<_2$ buenos órdenes de A. Entonces $(A, <_1) \cong (A, <_2)$.*

Demostración. Si no fueran isomorfos, entonces el ordinal de uno es menor que el ordinal del otro. Supongamos que $ord\,(A, <_1) < ord\,(A, <_2)$. Entonces $(A, <_1) \cong (A_a, <_2)$ para alguna $a \in A$, y como $A_a \subsetneq A$, tendríamos que A es equipotente a un subconjunto propio de él, lo que es imposible ya que A es finito. ■

Debido entonces a que existe un único buen orden (salvo isomorfismos) en un conjunto finito, para cada conjunto finito A de cardinalidad n, denotaremos $ord(A, <) = ord(n)$.

***Teorema* 4.1.21.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $C \subseteq A$. Entonces $(C, <_A)$ es un conjunto bien ordenado y*

$$ord(C, <_A) \leq ord(A, <_A).$$

Demostración. Claramente $(C, <_A)$ es un conjunto bien ordenado, puesto que cada subconjunto de C lo es también de A, por lo que cada subconjunto no vacío de C tiene mínimo.

Como cualesquiera dos ordinales son comparables basta demostrar que para todo $x \in C$, no puede existir un isomorfismo de conjuntos bien ordenados $f : (A, <_A) \longrightarrow (C_x, <_A)$.

Supongamos que sí existe tal función f para alguna $x \in C$. Entonces $f(x) \in C_x$, por lo que $f(x) < x$, lo que es imposible ya que, por el Teorema 4.1.9, $x \leq f(x)$. Por lo tanto $ord(C, <_A) \leq ord(A, <_A)$. ■

Consideremos ahora un conjunto bien ordenado $(A, <_A)$ y sea $\alpha = ord(A, <_A)$. Sea x tal que $x \notin A$ y $A' = A \cup \{x\}$. Definimos $<_{A'}$ por $<_{A'} \mid_A = <_A$ y $a <_{A'} x$ $\forall a \in A$. Entonces $(A', <_{A'})$ es un conjunto bien ordenado. Denotamos por $\alpha' = ord(A', <_{A'})$.

Es claro que α' no depende del elemento x que le agregamos al conjunto A.

***Teorema* 4.1.22.** *Para cada ordinal α, $\alpha < \alpha'$.*

Demostración. $i_A : (A, <_A) \longrightarrow (A'_x, <_A)$ dada por $i_A(a) = a$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados. ■

***Teorema* 4.1.23.** *Si α y β son ordinales tales que $\alpha \leq \beta \leq \alpha'$, entonces $\beta = \alpha$ o $\beta = \alpha'$.*

Demostración. Sean

$$\alpha = ord(A, <_A), \beta = ord(B, <_B) \text{ y } \alpha' = ord(A', <_{A'}),$$

recordemos que $A' = A \cup \{x\}$, $x \notin A$, $<_{A'} \mid_A = <_A$ y $a < x$ $\forall a \in A$ y supongamos que $\alpha < \beta$. Entonces $(A, <_A) \cong (B_y, <_B)$ para alguna $y \in B$. Si $\beta < \alpha'$, tendríamos que existe un isomorfismo de conjuntos bien ordenados $f : (B, <_B) \longrightarrow (A'_a, <_{A'})$ para alguna $a \in A'$. Entonces, por la Proposición 4.1.8, $(B_y, <_B) \cong ((A'_a)_{f(y)}, <_{A'}) = (A'_{f(y)}, <_{A'})$, y por lo tanto $(A, <_A) \cong (A'_{f(y)}, <_{A'})$.

Por otro lado, si $f(y) \neq x$, por la definición de A', $f(y) \in A$ y por ser $f(y) < x$ se tiene que $(A'_{f(y)}, <_{A'}) = (A_{f(y)}, <_A)$ y por lo tanto $(A, <_A) = (A_{f(y)}, <_A)$, lo que es imposible (Corolario 4.1.11). Entonces debe ser $f(y) = x$, pero $f(y) \in A'_a$ implica que $x = f(y) < a$ y esto último contradice el hecho de que x es el máximo de A'. Concluimos entonces que $\beta = \alpha'$. ■

Definición 4.1.5. *Dado un ordinal α, a α' lo llamamos el* ***sucesor*** *de α.*

Esta definición está justificada debido al Teorema 4.1.23, ya que α' es el número ordinal que le sigue inmediatamente a α, es decir, no existe un ordinal $\beta \neq \alpha$ y α' tal que $\alpha < \beta < \alpha'$.

***Proposición* 4.1.24.** *Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado que tiene máximo a y sea $\alpha = ord(A_a, <_A)$. Entonces $\alpha' = ord(A, <_A)$.*

Demostración. Es inmediato, ya que $A = A_a \cup \{a\}$ y $x < a \ \forall x \in A_a$. ■

***Proposición* 4.1.25.** *Sea $\alpha = ord(A, <_A)$. α es sucesor de un ordinal si y sólo si A tiene máximo.*

Demostración.
$\Rightarrow$) Supongamos que α es sucesor de β, es decir, $\beta' = \alpha$, y sea $\beta = ord(B, <_B)$. Entonces $\beta < \alpha$ y por lo tanto se tiene que $(B, <_B) \cong (A_a, <_A)$ para alguna $a \in A$.
Como $\beta' = \alpha$, entonces $A = A_a \cup \{a\}$ donde $x < a$ para toda $x \in A_a$. Por lo tanto a es el máximo de A.
$\Leftarrow$) Es la Proposición 4.1.24. ■

El conjunto vacío con orden vacío es el mínimo ordinal, ya que es menor o igual que cualquier ordinal, así que el conjunto vacío no es sucesor de ningún ordinal. Existen otros números ordinales que tampoco son sucesores de ningún número ordinal, por ejemplo el ordinal del conjunto de los números naturales con el orden usual. A este tipo de ordinales les daremos un nombre especial

Definición 4.1.6. *Un ordinal $\alpha \neq 0$ se llama* ***ordinal límite*** *si no es sucesor de ningún ordinal.*

***Teorema* 4.1.26.** *Cada conjunto X de números ordinales tiene supremo. Es decir, existe un número ordinal δ tal que $x \leq \delta$ para todo $x \in X$ y δ es el mínimo con esta propiedad.*

Demostración. $\bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma)$ es un conjunto de números ordinales, así que por el Teorema 4.1.19, $(\bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma), <)$ es bien ordenado con el orden usual de ordinales. Sea $\delta = ord(\bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma), <)$. Mostraremos que δ es cota superior de X. Esto es porque para cualquier $\gamma \in X$, $W(\gamma) \subseteq \bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma)$ y por

lo tanto, por el Teorema 4. 1.18 y 4. 1.21,

$$\gamma = ord(W(\gamma), <) \leq ord(\bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma), <) = \delta,$$

por lo que δ es cota superior de X. Ahora, el conjunto

$$\{\eta \mid \eta \text{ es ordinal y } \gamma \leq \eta \leq \delta \text{ para toda } \gamma \in X\}$$

es no vacío (ya que δ pertenece a él) y por el Teorema 4.1.19, tiene mínimo que es precisamente el supremo de X. ■

Nota 15. En el ejercicio 4.4 se pide demostrar que el supremo de X del Teorema 4.1.26 es justamente el ordinal δ dado en la demostración.

***Teorema* 4.1.27.** *Sea $\alpha \neq 0$ un ordinal. Son equivalentes*
(1) *α es ordinal límite,*
(2) *Para todo ordinal β, $\beta < \alpha \Longrightarrow \beta' < \alpha$,*
(3) *α es el supremo de $W(\alpha)$.*

Demostración.
(1) ⇒ (2) Sea $\beta < \alpha$ y supongamos que $\alpha \leq \beta'$ Entonces $\beta < \alpha \leq \beta'$
Por el Teorema 4.1.23, como $\alpha \neq \beta$, entonces $\alpha = \beta'$. Pero esto último es imposible ya que, por hipótesis, α es un ordinal límite. Por lo tanto $\beta' < \alpha$.

(2) ⇒ (3) $1^o/$ α es cota superior de $W(\alpha)$, ya que, para toda $\beta \in W(\alpha)$ $\beta < \alpha$.
$2^o/$ Supongamos que el ordinal γ es una cota superior de $W(\alpha)$. Probaremos que $\alpha \leq \gamma$. Si $\gamma < \alpha$, entonces, por hipótesis, $\gamma' < \alpha$, por lo que, por la definición de $W(\alpha)$, $\gamma' \in W(\alpha)$ y esto implica que por ser γ cota superior de $W(\alpha)$, $\gamma' \leq \gamma$, lo que, evidentemente, es un absurdo, así que $\alpha \leq \gamma$ y por lo tanto α es el supremo de $W(\alpha)$.

(3) ⇒ (1) No puede ser que α sea sucesor de algún ordinal β, ya que en este caso $W(\alpha)$ tendría como elemento máximo a β, y por lo tanto sería el supremo de $W(\alpha)$, por lo que debería ser $\beta = \alpha$, lo que es imposible, ya que $\alpha = \beta'$. Entonces α debe ser ordinal límite. ■

Nota 16. A cada ordinal $\alpha = ord(A, <_A)$ le podemos asociar el cardinal $\mathbf{c}(\alpha) = |A|$ (cardinal de A). Claramente, si $ord(A, <_A) = ord(B, <_B)$ entonces $|A| = |B|$. Sin embargo, si dos conjuntos A y B tienen el mismo

cardinal y $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ son conjuntos bien ordenados, no necesariamente se tiene que $ord(A, <_A) = ord(B, <_B)$. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\mathbb{N}$, de los números naturales, con el orden usual $<_{\mathbb{N}}$, es decir, el de un Sistema de Peano, y consideramos ahora el orden $<'_{\mathbb{N}}$, definido como sigue:

Para $n \neq 0$ y $m \neq 0$ $n <'_{\mathbb{N}} m$ si $n <_{\mathbb{N}} m$ y $n <'_{\mathbb{N}} 0$ para toda $n \neq 0$.

$<'_{\mathbb{N}}$ es un buen orden y $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ no es isomorfo a $(\mathbb{N}, <'_{\mathbb{N}})$, ya que $(\mathbb{N}, <'_{\mathbb{N}})$ tiene máximo y $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ no lo tiene.

Como cada conjunto no vacío de ordinales tiene primer elemento, denotaremos por $\boldsymbol{\varpi}$ al **primer ordinal infinito**, es decir, si α es un ordinal infinito,

$$\varpi = \text{mín}\{\beta \mid \beta \textit{ es un ordinal infinito y } \beta \leq \alpha\}.$$

***Teorema* 4.1.28.**
(1) *El ordinal de un conjunto finito de n elementos es n.*
(2) $ord(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}) = \varpi$.

Demostración.
(1) Ya hemos demostrado que dos buenos órdenes sobre un conjunto finito son isomorfos (Teorema 4.1.20), así que para un conjunto finito F, con n elementos, y $<_F$ un buen orden sobre F, entonces

$$(F, <_F) \cong (W(n), <) = n.$$

(2) Como ϖ es el primer ordinal infinito, y todo ordinal finito es menor que ϖ entonces

$$\begin{aligned}(W(\varpi), <) &= (\{\beta \mid \beta \textit{ es un ordinal y } \beta < \varpi\}, <)\\ &= (\{\beta \mid \beta \textit{ es un ordinal finito}\}, <)\\ &= (\{\beta \mid \beta \textit{ es un cardinal finito}\}, <)\\ &\cong (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}}).\end{aligned}$$

Finalmente, como $\varpi = ord(W(\varpi), <)$, entonces $\varpi = ord(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$. ■

Este último teorema nos dice que podemos identificar los cardinales finitos con los ordinales finitos, es decir, $ord(n) = \mathbf{c}(n) = n$. Entonces la sucesión de números ordinales comenzaría de la siguiente manera

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \varpi, \varpi', (\varpi')', \ldots, \varpi_1, \varpi'_1, (\varpi'_1)', \ldots, \varpi_2, \varpi'_2, (\varpi'_2)', \ldots$$

donde $\varpi, \varpi_1, \varpi_2, ...$ son los primeros ordinales límites y $(\varpi_i)'$ es el sucesor de ϖ_i.

Sea $(A, <_A)$ un conjunto bien ordenado y $\alpha = ord(A, <_A)$. Sabemos, por el Teorema 4.1.18, que $\alpha = ord(W(\alpha), <)$. Entonces debe existir un isomorfismo de conjuntos bien ordenados $f : (W(\alpha), <) \longrightarrow (A, <_A)$. Podemos entonces presentar a los elementos de A con subíndices ordinales (todos ellos menores que α), respetando el orden de A, como sigue

Sea β elemento de $W(\alpha)$. Denotamos por a_β al elemento de A tal que $f(\beta) = a_\beta$. Con esta notación tenemos que para $\beta, \gamma < \alpha$ y $a_\beta, a_\gamma \in A$, $a_\beta <_A a_\gamma$ si y sólo si $\beta < \gamma$. En particular podemos "enumerar" los números cardinales infinitos con su buen orden, quedando esta sucesión de la siguiente manera

(*) $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots, \aleph_\varpi, \aleph_{\varpi'}, \aleph_{(\varpi')'}, \ldots, \aleph_{\varpi_1}, \aleph_{\varpi'_1}, \aleph_{(\varpi'_1)'}, \ldots, \aleph_{\varpi_2}, \aleph_{\varpi'_2}, \aleph_{(\varpi'_2)'}, \ldots$

Dado un número ordinal α, denotamos por $\mathbf{c}(\alpha)$ a la cardinalidad de un representante para el ordinal α, es decir, si $\alpha = ord(A, <_A)$, entonces $\mathbf{c}(\alpha) = |A|$.

Hemos visto que dados dos ordinales, no necesariamente iguales, sus conjuntos representantes pueden tener el mismo cardinal (véase Nota 16 página 96), sin embargo lo que sí es cierto es que dados dos ordinales α y β, $\alpha < \beta$ implica $\mathbf{c}(\alpha) \leq \mathbf{c}(\beta)$, ya que un representante de α es $W(\alpha)$, que a su vez es subconjunto de $W(\beta)$ que es un representante de β. Así que tiene sentido estudiar todos los ordinales cuyos conjuntos representantes tienen el mismo cardinal. Por ejemplo para ϖ, el mínimo ordinal infinito, se tiene que

$$\mathbf{c}(\varpi) = \mathbf{c}(\varpi') = \mathbf{c}((\varpi')') = \ldots = \aleph_0.$$

Usando la notación dada en $(*)$, para cada cardinal $\aleph_\alpha$ (donde α es un ordinal), definimos $\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)$ y $\overline{\varpi_\alpha}$ como sigue

$$\mathbf{Z}(\aleph_\alpha) = \{\beta \mid \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) = \aleph_\alpha\} \text{ y } \overline{\varpi_\alpha} = \min \mathbf{Z}(\aleph_\alpha)$$

***Teorema* 4.1.29.** *Sea α un número ordinal infinito. Entonces*
(1) $\mathbf{c}(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)) = \aleph_{\alpha'}$.
(2) $ord(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha), <) = \overline{\varpi_{\alpha'}}$.

Demostración.
(1)
$$\begin{aligned} W(\overline{\varpi_{\alpha'}}) &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \beta < \overline{\varpi_{\alpha'}}\} \\ &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) < \aleph_{\alpha'}\} \\ &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) \leq \aleph_\alpha\} \\ &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) < \aleph_\alpha \text{ o } \mathbf{c}(\beta) = \aleph_\alpha\} \\ &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) < \aleph_\alpha\} \cup \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) = \aleph_\alpha\} \\ &= \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \beta < \overline{\varpi_\alpha}\} \cup \{\beta | \beta \textit{ es ordinal y } \mathbf{c}(\beta) = \aleph_\alpha\} \\ &= W(\overline{\varpi_\alpha}) \cup \mathbf{Z}(\aleph_\alpha). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la última unión es ajena y tomando el cardinal de estos conjuntos en cada lado, obtenemos

$$|W(\overline{\varpi_{\alpha'}})| = |W(\overline{\varpi_\alpha})| + |\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)|$$
$$\mathbf{c}(\overline{\varpi_{\alpha'}}) = \mathbf{c}(\overline{\varpi_\alpha}) + |\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)|$$
$$\aleph_{\alpha'} = \aleph_\alpha + |\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)|$$

Por lo tanto, por la Proposición 3.4.9

$$\aleph_{\alpha'} = \text{máx}\{\aleph_\alpha, |\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)|\}$$

y como $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha'}$, entonces $\aleph_{\alpha'} = |\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)|$.

(2) Debido a que $\mathbf{Z}(\aleph_\alpha) \subseteq W(\overline{\varpi_{\alpha'}})$, se tiene que

$$ord(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha), <) \leq ord(W(\overline{\varpi_{\alpha'}}), <) = \overline{\varpi_{\alpha'}}.$$

Si $ord(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha), <) < \overline{\varpi_{\alpha'}}$ tendríamos, por la definición de $\overline{\varpi_{\alpha'}}$, que

$$\mathbf{c}(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)) < \aleph_{\alpha'},$$

lo que es un absurdo ya que, por el inciso (1), $\mathbf{c}(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha)) = \aleph_{\alpha'}$. Por lo tanto $ord(\mathbf{Z}(\aleph_\alpha), <) = \overline{\varpi_{\alpha'}}$. ■

§ 4.2 Suma y producto de números ordinales

Introduciremos ahora la suma y producto de números ordinales. Es importante notar que esta suma y producto no tienen las mismas propiedades de las suma y producto de los números cardinales. Es más, veremos por ejemplo, que en general la suma no es conmutativa. Sin embargo en el caso concreto de los ordinales finitos ya hemos visto que podemos identificarlos con los números cardinales finitos y veremos que esta identificación se extiende a la suma, de tal manera que coinciden ambas sumas.

Definición 4.2.1. *Sea $(I, <_I)$ un conjunto bien ordenado (conjunto de índices) y sea $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ una familia de números ordinales. La* ***suma de los ordinales***

$$\sum_{i\in(I,<_I)} \alpha_i = ord\left(\bigcup_{i\in I} A_i, <\right)$$

donde $\alpha_i = ord(A_i, <_i)$ para cada $i \in I$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ y el orden $<$ en $\bigcup_{i\in I} A_i$ está definido como sigue
$a < b$ si y sólo si $a <_i b$ para $a, b \in A_i$ o $a \in A_i$, $b \in A_j$ con $i <_I j$.

En lo que sigue $<$ indicará el orden para la unión de conjuntos de la definición anterior.

Nota 17. Es importante hacer ver que la definición de suma depende del orden en el conjunto ordenado I de índices. Así que debemos tener mucho cuidado con este conjunto puesto que si damos otro orden $<'$ en I, entonces será muy posible, como lo veremos más adelante, que las sumas correspondientes no sean iguales, es decir, la suma, en general, no es conmutativa.

Justifiquemos ahora la definición de suma, es decir,

***Proposición* 4.2.1.**
(1) *Para cada familia de números ordinales* $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ *existen representantes de cada uno de ellos que son ajenos dos a dos.*
(2) *El orden* $<$ *definido para la suma es un buen orden en* $\bigcup_{i\in I} A_i$.
(3) *Si* $(B_i, <) \cong (A_i, <'_i)$ *donde* $B_i \cap B_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$, *entonces*

$$ord(\bigcup_{i\in I} A_i,\ <) = ord(\bigcup_{i\in I} B_i,\ <').$$

Demostración.
(1) Basta tomar $B_i = A_i \times \{i\}$ con el orden inducido por el de A_i, es decir $(a, i) < (a', i)$ si y sólo si $a <_A a'$.

(2) No es difícil demostrar que $<$ es un orden. Probemos entonces que es un buen orden. Sea $\varnothing \neq C \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$. Sea $m = \text{mín}\{i \in I \mid\ C \cap A_i \neq \varnothing\}$. Es fácil ver que el mínimo de $C \cap A_m$ es el mínimo de C.

(3) Queda como ejercicio. ■

En el caso particular de $I = \{1, 2\}$ con el orden usual $1 < 2$, escribiremos simplemente $\alpha_1 + \alpha_2$. En general Si $I = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, escribiremos

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

y para $I = \mathbb{N}$, con el orden usual, escribiremos

$$\sum_{i\in(\mathbb{N},\leq)} \alpha_i = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots$$

Nota 18. Hemos visto (Teorema 4.1.20) que cada conjunto finito A admite un único buen orden (salvo isomorfismo), así que si $\alpha = ord(A, <_A)$ es un ordinal finito con $|A| = n$, ya hemos visto que $ord(A, <) = ord(n) = n$ y así tenemos entonces que $ord(n) + ord(m) = ord(n + m)$. Por lo anterior

podemos ver que la suma de dos ordinales finitos coincide con la suma de números naturales, es decir, $ord(n) + ord(m) = c(n) + c(m) = n + m$. Por lo tanto si nos restringimos a la suma finita de ordinales finitos, esta suma es conmutativa. Sin embargo, en el caso en que alguno de los ordinales sea infinito, aún cuando se trate de una suma finita, esta propiedad no se cumple. Por ejemplo $1 + \varpi = \varpi$ y $\varpi + 1 = \varpi'$.

***Teorema* 4.2.2.** *Sean α, β y γ números ordinales. Entonces*
(1) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
(2) $\alpha < \beta \iff$ *existe* $\gamma \neq 0$ *tal que* $\alpha + \gamma = \beta$
(3) $\alpha < \beta \iff \gamma + \alpha < \gamma + \beta$
(4) $\alpha < \beta \implies \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$

Demostración. Sean $\alpha = ord\,(A, <_A)$, $\beta = ord\,(B, <_B)$ y $\gamma = ord\,(C, <_C)$ donde A, B y C son ajenos dos a dos.

(1) Es inmediato. Note que en la definición de suma no se usaron paréntesis.

(2) Supongamos $\alpha < \beta$ y sea $b \in B$ tal que $(A, <_A) \overset{f}{\cong} (B_b, <_B)$. Sea $<_{A\cup(B-B_b)}$ definido en $A \cup (B - B_b)$ como sigue: $<_{A\cup(B-B_b)}|_A = <_A$, $<_{A\cup(B-B_b)}|_{B-B_b} = <_B|_{B-B_b}$ y $a < c$ para todo $a \in A$ y para todo $c \in B - B_b$. $<_{A\cup(B-B_b)}$ es un buen orden en $A \cup (B - B_b)$ (fíjese que es el buen orden definido para la suma de $\alpha + ord(B - B_b, <_{B-B_b})$).

La función $F : (A \cup (B - B_b), <_{A\cup(B-B_b)}) \longrightarrow (B = B_b \cup (B - B_b), <_B)$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \\ x & \text{si } x \in B - B_0 \end{cases}$$

es un isomorfismo. Por lo tanto si $\gamma = ord(B - B_b, <_B)$ se tiene que $\alpha + \gamma = \beta$, donde $\gamma \neq 0$ ya que $B - B_b \neq \varnothing$.

Inversamente, si para algún ordinal $\gamma = ord(C, <_C) \neq 0$, $\alpha + \gamma = \beta$, donde $\beta = ord(A \cup C, <_{A\cup C})$, la función $i_A : (A, <_A) \longrightarrow ((A \cup C)_c, <_{A\cup C})$ donde $<_{A\cup C}$ es el buen orden dado para la suma $\alpha + \gamma$ dada por $i_A(x) = x$ $\forall\ x \in A$ y donde c es el mínimo de C, es un isomorfismo. Por lo tanto $\alpha < \beta$.

(3) Supongamos $\alpha < \beta$ y sea f como en (2). Recordemos que el orden en $C \cup B$ está definido como sigue

$$x < y \iff \begin{cases} x <_c y & \text{si } x, y \in C \\ x <_B y & \text{si } x, y \in B \\ x \in C \text{ y } y \in B & \end{cases}$$

Entonces para $b \in B$, $(C \cup B)_b = C \cup B_b$, por lo que la función $F : (C \cup A, <_{C\cup A}) \longrightarrow (C \cup B_b, <_{C\cup B})$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C \\ \\ f(x) & \text{si } x \in A \end{cases}$$

es un isomorfismo y por lo tanto $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ donde $(A, <_A) \overset{f}{\cong} (B_b, <_B)$.

Inversamente si $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$ entonces por el inciso (2) ya demostrado, existe un ordinal $\mu \neq 0$ tal que $\gamma + \alpha + \mu = \gamma + \beta$.

No puede ser $\beta \leq \alpha$ ya que si así fuera, entonces necesariamente por (2) existiría un ordinal $\delta \geq 0$ tal que $\beta + \delta = \alpha$ por lo tendríamos que $\gamma + \beta + \delta + \mu = \gamma + \alpha + \mu = \gamma + \beta$, donde $\delta + \mu \neq 0$ (Ejercicio 4.8), pero esto implicaría por (2), que $\gamma + \beta < \gamma + \beta$ lo que evidentemente es un absurdo. Por lo tanto debe ser $\alpha < \beta$.

(4) Supongamos $\alpha < \beta$ y sea f como en (2). Entonces la función $F : (A \cup C, <_{A\cup C}) \longrightarrow (B_b \cup C, <_{B\cup C})$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \\ x & \text{si } x \in C \end{cases}$$

es un isomorfismo, donde $ord(B_b \cup C, <_{B\cup C}) \leq ord(B \cup C, <_{B\cup C})$ debido al Teorema 4.1.21. Entonces $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. ■

El siguiente ejemplo muestra que en (4) la igualdad se puede dar $0 < 1$ y sin embargo $0 + \varpi = 1 + \varpi = \varpi$.

Definiremos ahora el producto de dos ordinales y esto lo hacemos a través de la suma de ordinales.

Definición 4.2.2. *El **producto** de dos ordinales α y β es*

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{b \in (B, <_B)} \alpha_b$$

donde $ord(B, <_B) = \beta$ y $\alpha_b = \alpha \ \forall \ b \in B$.

Volviendo a la definición aquí presentada, la idea es tomar la unión (ajena) de A tantas veces como elementos tiene B, con el orden definido para la suma. Es evidente que el producto no depende de la elección de los representantes.

Para cualesquiera ordinales α y β, se cumple que $\mathbf{c}(\alpha \cdot \beta) = \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\beta)$ por lo siguiente

$$\mathbf{c}(\alpha \cdot \beta) = \mathbf{c}\left(\sum_{b \in (B, <_B)} \alpha_b\right) = \sum_{b \in (B, <_B)} \mathbf{c}(\alpha_b) = \sum_{b \in (B, <_B)} \mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\beta).$$

En el caso particular de números naturales n y m se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(ord(n) \cdot ord(m)) &= \mathbf{c}(ord(n)) \cdot \mathbf{c}(ord(m)) \\ &= \mathbf{c}(n) \cdot \mathbf{c}(m) \\ &= \mathbf{c}(n \cdot m) \\ &= \mathbf{c}(ord(n \cdot m)). \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.1.20, existe un único conjunto bien ordenado finito (salvo isomorfismos) y al que hemos denotado por n si su cardinalidad es n. Entonces para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$, si $\mathbf{c}(ord(n)) = \mathbf{c}(ord(m))$, se puede afirmar que $ord(n) = ord(m)$. Pero hemos visto que

$$\mathbf{c}(ord(n) \cdot ord(m)) = \mathbf{c}(ord(n \cdot m)).$$

Por lo tanto se debe tener que $ord(n) \cdot ord(m) = ord(n \cdot m)$. Por lo tanto también en el caso del producto podemos utilizar sin lugar a confusión la notación $n \cdot m$.

En el ejercicio 4.11 se presenta otra manera de definir el producto de dos ordinales, usando el producto cartesiano de los representantes de cada uno de los ordinales y el orden antilexicográfico.

Evidentemente podemos generalizar, sin ningún problema, el producto de dos ordinales al producto de un número finito de ordinales. Sin embargo para un conjunto bien ordenado infinito de ordinales surgen complicaciones y por tal motivo no trataremos ese caso.

***Teorema* 4.2.3.** *Sean α, β y γ números ordinales. Entonces*
(1) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$,
(2) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$,
(3) $\alpha < \beta$ *y* $\gamma \neq 0 \Longrightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$,
(4) $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$,
(5) $\gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta$ *y* $\gamma \neq 0 \Longrightarrow \alpha = \beta$.

Demostración. Sean $\alpha = ord\,(A, <_A)$, $\beta = ord\,(B, <_B)$ y $\gamma = ord\,(C, <_C)$

(1) Por el ejercicio 4.11, $\alpha \cdot \beta = ord(B \times C, <_{B\times C})$, donde $<_{B\times C}$ es el orden antilexicográfico en $B \times C$. Entonces

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \sum_{i\in(B\times C, <_{B\times C})} \alpha_i,$$

donde $\alpha_i = \alpha$ para toda $i \in B \times C$. Para cada $c \in C$ aparece el conjunto $B \times \{c\}$ que es isomorfo a B, así que B aparece tantas veces como indica C con su orden. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \sum_{i\in(B\times C, <_{B\times C})} \alpha_i \qquad \big(\textit{con } \alpha_i = \alpha \textit{ para toda } i \in B \times C\big) \\
&= \sum_{c\in(C,<_C)} \left(\sum_{b\in(B,<_B)} \alpha_b \right)_c \\
&\big(\textit{con } \alpha_b = \alpha \textit{ para toda } b \in B \textit{ y } \left(\sum_{b\in(B,<_B)} \alpha_b \right)_c = \left(\sum_{b\in(B,<_B)} \alpha_b \right)_{c'} \textit{para cualesquiera } c, c' \in C.\big) \\
&= \sum_{c\in(C,<_C)} (\alpha \cdot \beta)_c \quad \big(\textit{donde } (\alpha \cdot \beta)_c = \alpha \cdot \beta \textit{ para toda } c \in C\big) \\
&= (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma
\end{aligned}$$

(2) Consideramos $B \cap C = \varnothing$

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \sum_{i\in(B\cup C, <_{B\cup C})} \alpha$$

donde, recordamos $<_{B\cup C}$ está dado como en la definición 4.2.1.

Por la asociatividad de la suma

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in(B\cup C, <_{B\cup C})} \alpha &= \sum_{i\in(B,<_B)} \alpha + \sum_{i\in(C,<_C)} \alpha \\
&= \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.
\end{aligned}$$

(3) Sea $\alpha < \beta$ y $\gamma \neq 0$. Entonces por (2) del Teorema 4.2.2, existe $\delta \neq 0$ tal que $\alpha + \delta = \beta$, luego $\gamma \cdot (\alpha + \delta) = \gamma \cdot \beta$, que es, por el inciso anterior, $\gamma \cdot \alpha + \gamma \cdot \delta = \gamma \cdot \beta$ y como $\gamma \cdot \delta \neq 0$ (Ejercicio 4.9), entonces $\gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$.

(4) Sea $\alpha < \beta$. Entonces $\alpha \cdot \gamma$ está representado por un subconjunto ordenado de un representante de $\beta \cdot \gamma$, luego por el Teorema 4.1.21, $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$.

(5) Es consecuencia inmediata de (3). ■

Nota 19.
(i) En general el producto no es conmutativo
$2 \cdot \varpi = \sum_{i \in (\mathbb{N}, \leq)} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + \ldots = \varpi$ y $\varpi \cdot 2 = \varpi + \varpi \neq \varpi$.

(ii) En general no vale la ley distributiva por la derecha

$$\begin{aligned}(\varpi + 1) \cdot 2 &= (\varpi + 1) + (\varpi + 1) \\ &= \varpi + (1 + \varpi) + 1 \\ &= \varpi + \varpi + 1 \\ &= \varpi \cdot 2 + 1 \\ &\neq \varpi \cdot 2 + 2 \\ &= \varpi \cdot 2 + 1 \cdot 2.\end{aligned}$$

(iii) Un ejemplo del caso del inciso (4) del teorema anterior donde se da la igualdad sería

$1 < 2$ y sin embargo $1 \cdot \varpi = 2 \cdot \varpi$ ya que $1 \cdot \varpi = 1 + 1 + 1 + \ldots = \varpi$ y también $2 \cdot \varpi = \varpi$.

***Lema* 4.2.4.** *Para cada conjunto $A \neq \varnothing$ de números ordinales y cada número ordinal α se tiene que $\alpha + sup A = sup\{\alpha + \beta \mid \beta \in A\}$.*

Demostración. Para cualquier $\beta \in A$ se tiene que $\beta \leq supA$ y por lo tanto por (3) del Teorema 4.2.2 $\alpha + \beta \leq \alpha + supA$ para toda $\beta \in A$, por lo que $\alpha + supA$ es cota superior de $\{\alpha + \beta \mid \beta \in A\}$.

Veamos ahora que es la mínima

Sea $\delta < \alpha + supA$. Si $\delta < \alpha$, entonces $\delta < \alpha + \beta$ para cualquier $\beta \in A$, por lo que en este caso δ no puede ser cota superior de $\{\alpha + \beta \mid \beta \in A\}$. Si $\delta \geq \alpha$, entonces por (2) del Teorema 4.2.2, existe un ordinal γ tal que $\alpha + \gamma = \delta$. Entonces $\alpha + \gamma < \alpha + supA$, y por (3) del Teorema 4.2.2 resulta que $\gamma < supA$, lo que implica que existe $\rho \in A$ tal que $\gamma < \rho$ y por lo tanto $\delta = \alpha + \gamma < \alpha + \rho \leq \alpha + supA$, por lo que δ no puede ser cota superior de $\{\alpha + \beta \mid \beta \in A\}$. Por lo tanto $\alpha + supA = sup\{\alpha + \beta \mid \beta \in A\}$. ■

***Teorema* 4.2.5.** *Sean α, β y γ números ordinales tales que $\gamma < \alpha \cdot \beta$. Entonces existen números ordinales η y δ únicos tales que*

$$\gamma = \alpha \cdot \eta + \delta \text{ donde } \eta < \beta \text{ y } \delta < \alpha.$$

Demostración. Sean $\alpha = ord(A, <_A)$ y $\beta = ord(B, <_B)$. Entonces $\alpha \cdot \beta = \sum_{b \in (B, <_B)} \alpha$. Sea $\gamma = ord(C, <_C)$; un representante de $\alpha \cdot \beta$ es $(\bigdot\bigcup_{b \in (B, <_B)} A_b, <_\Sigma)$ donde $A_b \cap A_{b'} = \varnothing$ si $b \neq b'$, $(A_b, <_{A_b}) \cong (A, <_A)$ y

$<_\Sigma$ es el orden dado en la definición 4.2.1. Como $\gamma < \alpha \cdot \beta$, entonces un representante de γ está dado por un segmento inicial de $\overset{\bullet}{\bigcup}_{b\in(B,<_B)} A_b$. Esto es $(C,<_C) \cong ((\overset{\bullet}{\bigcup}_{b\in(B,<_B)} A_b)_{a_{b_0}},<_\Sigma)$, donde $a_{b_0} \in A_{b_0}$ (el b_0-ésimo ejemplar de A en la suma). Por la manera en que está definido el orden en $\overset{\bullet}{\bigcup}_{b\in(B,<_B)} A_b$ se tiene que

$$C \cong (\overset{\bullet}{\bigcup}_{b\in(B_{b_0},<_B)} A_b)\overset{\bullet}{\bigcup}(A_{b_0})_{a_{b_0}}.$$

Si definimos $\eta = ord(\overset{\bullet}{\bigcup}_{b\in(B_{b_0},<_B)} A_b,<_\Sigma)$ y $\delta = ord((A_{b_0})_{a_{b_0}},<_A)$, entonces $\gamma = \alpha\cdot\eta+\delta$, donde claramente $\eta<\beta$ y $\delta<\alpha$. ■

***Corolario* 4.2.6.** *Cada número ordinal γ se puede expresar de la forma*

$$\gamma = \varpi\cdot\beta + n$$

para algún ordinal finito n.

Demostración. Aplicando el Teorema 4.2.5, basta exhibir un número ordinal λ tal que $\gamma < \varpi\cdot\lambda$. Sea $\lambda = \gamma+1$. Multiplicando por γ a la derecha en la desigualdad $1<\varpi$ tenemos, por (4) del Teorema 4.2.3

$$\gamma \le \varpi\cdot\gamma < \varpi\cdot\gamma+\varpi = \varpi\cdot(\gamma+1) = \varpi\cdot\lambda.$$ ■

Nota 20. $\varpi\cdot\beta$ es ordinal límite ó cero. Entonces el Teorema 4.2.5 nos dice que todo número ordinal infinito es la suma de un ordinal límite y de un ordinal finito.

Definiremos ahora la potencia de un número ordinal.

Lo más natural sería definir, para dos números ordinales α y β, la potencia α^β como el producto de α, "β veces". Sin embargo debido a que no hemos definido el producto de ordinales con un número infinito de factores, nos vemos en la necesidad de introducir la definición de otra manera. Para esto utilizaremos el Teorema de Recursión Transfinita.

Consideremos un número ordinal $\alpha \neq 0$ fijo.

Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de todos los números ordinales menores que un número ordinal "muy grande"(lo que significa que se tomará tan grande como

sea necesario en cada aplicación concreta). Sea $\mathscr{O}$ la clase de los números ordinales y sea G la función que a cada aplicación f del segmento $W(\beta)$ de $\mathcal{A}$ en los ordinales le hace corresponder un número ordinal de la siguiente manera[1]

$$G(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \\ f(\gamma) \cdot \alpha & \text{si } \beta = \gamma + 1 \\ \sup\{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\} & \text{si } \beta \text{ es un ordinal límite.} \end{cases}$$

Por el Teorema de Recursión Transfinita, existe una única función $F_\alpha : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}$ tal que a cada número ordinal β le hace corresponder un número ordinal $F_\alpha(\beta)$ tal que para todo β, $F_\alpha(\beta) = G(F_\alpha|_{W(\beta)})$.

Definición 4.2.3. *Sean α y β números ordinales y F_α la función construida en el párrafo inmediato anterior a esta definición. Definimos*

$$\alpha^\beta = \begin{cases} F_\alpha(\beta) & \textit{si } \alpha \neq 0 \\ \\ 0 & \textit{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Nota 21. Para $\alpha = 0$, α^β no se puede definir como $F_\alpha(\beta)$ ya que entonces se tendría

$$0^\beta = F_0(\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta = 0 \text{ ó } \beta \text{ es un ordinal límite,} \\ \\ 0 & \text{si } \beta \text{ es un sucesor.} \end{cases}$$

que no es lo que uno esperaría.

Para $\alpha \neq 0$, tenemos

$$\begin{array}{ll} \alpha^0 = 1, & \\ \alpha^\beta = \alpha^{\gamma+1} = \alpha^\gamma \cdot \alpha & \text{para un ordinal } \beta \text{ sucesor de } \gamma, \\ \alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma \mid \alpha < \beta\} & \text{para un ordinal límite } \beta. \end{array}$$

Analicemos algunos casos particulares

Si $\beta = ord(n)$ es un número natural, como es de esperarse para $\alpha \neq 0$, α^β es el producto de α con sí mismo n veces, es decir,

$$\alpha^\beta = \alpha^{ord(n)} = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n-veces}.$$

[1]Aún cuando el codominio de una función debe ser un conjunto en esta ocasión hemos tomado la clase de los números ordinales para facilitar la escritura de la demostración, pues la imagen dependerá del dominio considerado. Además en la Teoría de Conjunto formal se puede demostrar que la imagen de G es un conjunto y entonces el Teorema de Recursión Transfinita es aplicable a $\mathcal{A}$ y G.

Tomando cardinalidades tenemos que

$$\mathbf{c}(\alpha^n) = \mathbf{c}(\underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{n-veces}) = \underbrace{\mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\alpha) \cdot \mathbf{c}(\alpha) \cdot \ldots \cdot \mathbf{c}(\alpha)}_{n-veces} = \mathbf{c}(\alpha)^n.$$

Por lo anterior si además $\alpha = ord(m)$, entonces

$$\mathbf{c}(ord(m)^{ord(n)}) = \mathbf{c}(m^n)$$

y por el hecho de que hay un único orden, salvo isomorfismos, definido en un conjunto finito, se tiene que $ord(m)^{ord(n)} = ord(m^n)$. Por lo tanto para el caso en que α y β son finitos, la potencia α^β coincide con la definida para números cardinales, de manera que, como lo hemos hecho hasta ahora, directamente lo denotaremos por $\boldsymbol{m^n}$.

Por otro lado, por ejemplo, para $\alpha = 2$ y $\beta = \varpi$, se tiene

$$2^\varpi = (ord(2))^\varpi = \sup\{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varpi,$$

así que $\mathbf{c}(2^\varpi) = \mathbf{c}(\varpi) = \aleph_0$.

Sin embargo $\mathbf{c}(2)^{\mathbf{c}(\varpi)} = 2^{\aleph_0}$. En este caso entonces

$$\mathbf{c}(2^\varpi) = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathbf{c}(2)^{\mathbf{c}(\varpi)}$$

por lo que la igualdad $\mathbf{c}(\alpha)^\beta = \mathbf{c}(\alpha)^{\mathbf{c}(\beta)}$ no es verdadera en el caso en que el exponente es infinito. Por lo anterior en el caso en que β es infinito debemos tener cuidado en nuestra notación ya que por ejemplo no es lo mismo 2^ϖ que $2^{\aleph_0}$ puesto que en el primer caso estamos tratando con números ordinales y en el segundo con números cardinales. Esto es, en general para $\alpha = ord(A, <_A)$ y $\beta = ord(B, <_B)$, la notación α^β no tiene nada que ver con A^B que es el conjunto de funciones de B en A.

***Teorema* 4.2.7.** *Sean α, β y γ números ordinales. Si $\alpha \neq 0, 1$ y $\beta < \gamma$, entonces $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Para $\alpha = 1$, se tiene que $\alpha^\beta = 1$.*

Demostración. Lo demostraremos por inducción transfinita sobre γ, considerando β fijo.

Hipótesis de inducción. Supongamos que vale para todo $\delta < \gamma$, es decir, $\beta < \delta$ implica $\alpha^\beta < \alpha^\delta$. Debemos demostrar que $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Sea $\beta < \gamma$. Se presentan tres casos

(1) $\gamma = 0$. En este caso no hay nada que demostrar.

(2) $\gamma = \delta + 1$. Como $\beta < \gamma$, entonces $\beta \leq \delta$ y usando la hipótesis de inducción, tenemos, que $\alpha^\beta \leq \alpha^\delta < \alpha^\delta \cdot \alpha = \alpha^{\delta+1} = \alpha^\gamma$.

(3) γ es un ordinal límite. En este caso $\beta < \gamma$ implica $(\beta + 1) < \gamma$, luego por la definición de α^γ en este caso

$$\alpha^\gamma = \sup\{\alpha^\mu \mid \mu < \gamma\} \geq \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha > \alpha^\beta.$$

Por último, es claro que para $\alpha = 1$, $\alpha^{\beta} = 1$. ■

***Lema* 4.2.8.** *Para cada número ordinal $\alpha \neq 0$ y cada conjunto X no vacío de números ordinales se tiene*

$$\alpha^{\sup X} = \sup\{\alpha^{\beta} \mid \beta \in X\},$$

donde $\sup X$ *denota el supremo de* X.

Demostración. Para todo $\gamma \in X$ es cierto que $\gamma \leq \sup X$, y por el Teorema 4.2.7, $\alpha^{\gamma} \leq \alpha^{\sup X}$, por lo que $\alpha^{\sup X}$ es cota superior de $\{\alpha^{\beta} \mid \beta \in X\}$.

Veamos ahora que es la mínima cota superior

Sea $\delta < \alpha^{\sup X}$. Demostraremos que en cualquiera de los tres casos que se pueden presentar, para $\sup X$, que sea 0, un sucesor o un número limite, δ no es cota superior de $\{\alpha^{\beta} \mid \beta \in X\}$.

(1) $\sup X = 0$. Entonces debe ser $X = \{0\}$. Como $\alpha^0 = 1$, entonces la única posibilidad para que $\delta < \alpha^{\sup X} = \alpha^0 = 1$ es que $\delta = 0$ que evidentemente no es cota superior de $\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\} = \{1\}$.

(2) $\sup X = \mu + 1$. En este caso, evidentemente $\sup X \in X$ y por lo tanto $\alpha^{\sup X} \in \{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$, lo cual implica que δ no es cota superior de $\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$.

(3) $\sup X$ es un ordinal límite. Entonces, por definición,

$$\alpha^{\sup X} = \sup\{\alpha^{\beta} |\ \beta < \sup X\}$$

así que $\delta < \alpha^{\sup X} = \sup\{\alpha^{\beta} |\ \beta < \sup X\}$ implica que existe un ordinal $\beta < \sup X$ tal que $\delta < \alpha^{\beta}$. Pero si $\beta < \sup X$, entonces existe $\gamma \in X$ tal que $\beta < \gamma$ por lo que, $\alpha^{\beta} \leq \alpha^{\gamma}$ (la igualdad se da en el caso $\alpha = 1$). Finalmente, se tiene entonces que $\delta < \alpha^{\gamma}$ para alguna $\gamma \in X$, por lo que δ no puede ser cota superior de $\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$.

En los tres casos hemos demostrado que δ no puede ser cota superior de $\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$. Por lo tanto, $\alpha^{\sup X}$ es la mínima cota superior de $\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$, es decir, $\alpha^{\sup X} = \sup\{\alpha^{\beta} | \beta \in X\}$. ■

***Lema* 4.2.9.** *Para cada conjunto X de números ordinales y para cualquier ordinal α,*

$$\alpha \cdot \sup X = \sup\{\alpha \cdot \beta |\ \beta \in X\}.$$

Demostración. $\alpha \cdot \sup X$ es cota superior de $\{\alpha \cdot \beta |\ \beta \in X\}$ ya que $\beta \leq \sup X$ implica que $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \sup X$ por (3) del Teorema 4.2.3.

Veamos ahora que es la mínima cota superior.

Sea $\delta < \alpha \cdot \sup X$. Por el Teorema 4.2.5, existen ordinales μ y ρ tales que $\delta = \alpha \cdot \mu + \rho$, donde $\mu < \sup X$ y $\rho < \alpha$. Como $\mu < \sup X$, existe $\sigma \in X$ tal que $\mu < \sigma$, luego $\mu + 1 \leq \sigma$, y por (3) del Teorema 4.2.3, $\alpha(\mu + 1) \leq \alpha \cdot \sigma$. Entonces $\delta = \alpha \cdot \mu + \rho < \alpha \cdot \mu + \alpha = \alpha(\mu + 1) \leq \alpha \cdot \sigma$. Como $\sigma \in X$, esto implica que δ no es cota superior de $\{\alpha \cdot \beta |\ \beta \in X\}$. Por lo tanto, $\alpha \cdot \sup X$ es la mínima cota superior de $\{\alpha \cdot \beta |\ \beta \in X\}$, es decir, $\alpha \cdot \sup X = \sup\{\alpha \cdot \beta |\ \beta \in X\}$. ■

***Lema* 4.2.10.** *Si α es un ordinal y $\alpha \neq 0$, entonces para todo ordinal β, $\alpha^\beta \neq 0$.*

Demostración. Ejercicio 4.12. ■

***Teorema* 4.2.11.** *Sean α, β y γ números ordinales. Entonces*
(1) $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$
(2) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \cdot \gamma}$

Demostración. Los dos resultados son claros para $\alpha = 0$, así que supongamos $\alpha \neq 0$, y en este caso tendremos, por el Lema 4.2.10, que $\alpha^\beta \neq 0$ para todo ordinal β.

(1) Por inducción sobre γ. Supongamos que para $\delta < \gamma$ se tiene que $\alpha^\beta \alpha^\delta = \alpha^{\beta+\delta}$. Consideramos los tres casos posibles para γ.

(i) $\gamma = 0$. Entonces $\alpha^\beta \cdot \alpha^0 = \alpha^\beta \cdot 1 = \alpha^\beta = \alpha^{\beta+0}$

(ii) $\gamma = \delta + 1$ y por lo tanto $\delta < \gamma$. Entonces

$$\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^\beta \cdot \alpha^{\delta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\delta \cdot \alpha = \alpha^{\beta+\delta} \cdot \alpha = \alpha^{(\beta+\delta)+1} = \alpha^{\beta+(\delta+1)} = \alpha^{\beta+\gamma}.$$

(iii) γ ordinal límite. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma &= \alpha^\beta \cdot \sup\{\alpha^\delta \mid \delta < \gamma\} \\
&= \sup\{\alpha^\beta \cdot \alpha^\delta \mid \delta < \gamma\} && \text{(Lema 4.2.9)} \\
&= \sup\{\alpha^{\beta+\delta} \mid \delta < \gamma\} && \text{(hipótesis de inducción)} \\
&= \alpha^{\sup\{\beta+\delta \mid \delta < \gamma\}} && \text{(Lema 4.2.8)} \\
&= \alpha^{\beta+\sup\{\delta \mid \delta < \gamma\}} && \text{(Lema 4.2.4)} \\
&= \alpha^{\beta+\gamma}.
\end{aligned}$$

(2) Nuevamente por inducción sobre γ. Supongamos que para $\delta < \gamma$ se tiene que $(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta \cdot \delta}$. Veamos cada uno de los tres posibles casos para γ.

(i) $\gamma = 0$. Entonces $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta\cdot 0}$.
(ii) $\gamma = \delta + 1$, por lo que $\delta < \gamma$. Entonces

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= (\alpha^\beta)^{\delta+1}\\ &= (\alpha^\beta)^\delta \cdot \alpha^\beta && \text{(inciso (1))}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\delta}\cdot\alpha^\beta && \text{(hipótesis de inducción)}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\delta+\beta} && \text{(inciso (1))}\\ &= \alpha^{\beta(\delta+1)} && \text{(Teorema 4.2.3 inciso (2))}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\gamma}.\end{aligned}$$

(iii) γ un ordinal límite. Entonces

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= \sup\{(\alpha^\beta)^\delta \mid \delta < \gamma\}\\ &= \sup\{\alpha^{\beta\cdot\delta} \mid \delta < \gamma\} && \text{(hipótesis de inducción)}\\ &= \alpha^{\sup\{\beta\cdot\delta\mid\delta<\gamma\}} && \text{(Lema 4.2.8)}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\sup\{\delta\mid\delta<\gamma\}} && \text{(Lema 4.2.9)}\\ &= \alpha^{\beta\cdot\gamma}.\end{aligned}$$

■

En general no es cierto que $\alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma = (\alpha\cdot\beta)^\gamma$. Por ejemplo $2^\varpi \cdot 2^\varpi \neq (2\cdot 2)^\varpi$ puesto que $(2\cdot 2)^\varpi = 4^\varpi = \varpi$ y $2^\varpi \cdot 2^\varpi = \varpi\cdot\varpi = \varpi^2 \neq \varpi$.

***Teorema* 4.2.12.** *Sea $\xi > 1$ un ordinal fijo. Entonces cada número ordinal $\alpha > 0$ se expresa de manera única como $\alpha = \xi^{\nu_0}\cdot\eta_0 + \xi^{\nu_1}\cdot\eta_1 + \ldots + \xi^{\nu_r}\cdot\eta_r$, donde r es finito, $\nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_r \geq 0$ y $0 < \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r < \xi$.*

Demostración. Para demostrar este teorema probaremos primero las siguientes afirmaciones.

Dado un número ordinal α

(*A*) Existe un número ordinal β_0 tal que $\alpha < \xi^{\beta_0}$ el cual es mínimo con esta propiedad.

Basta demostrar que existe por lo menos un ordinal γ tal que $\alpha < \xi^\gamma$, ya que del conjunto de los γ con esta propiedad podemos tomar el mínimo. Demostraremos que $\alpha < \xi^{\alpha+1}$ por inducción transfinita sobre α.

Supongamos que para todo $\delta < \alpha$, es cierto que $\delta < \xi^{\delta+1}$

(1) Si $\alpha = 0$, entonces evidentemente $0 < \xi^{0+1} = \xi$.

(2) Si $\alpha = \delta + 1$, entonces, por hipótesis de inducción, como $\delta < \alpha$, se tiene que $\delta < \xi^{\delta+1} = \xi^\alpha$, lo que implica $\delta + 1 \leq \xi^{\delta+1}$. Entonces

$$\alpha = \delta + 1 \leq \xi^{\delta+1} < \xi^{\delta+1}\cdot\xi = \xi^{\delta+2} = \xi^{\alpha+1}.$$

(3) Si α es ordinal límite, entonces, por hipótesis de inducción, para cualquier ordinal $\delta < \alpha$ se tiene que $\delta < \xi^{\delta+1}$. Entonces para cualquier $\delta < \alpha$

se tiene

$$\delta < \xi^{\delta+1} \leq \sup\{\xi^{\gamma+1} \mid \gamma < \alpha\} = \xi^{\sup\{\gamma+1|\gamma<\alpha\}} = \xi^{\sup\{\gamma|\gamma<\alpha\}} = \xi^{\alpha}$$

donde la penúltima igualdad se da porque α es ordinal límite. Por lo tanto ξ^{α} es cota superior de $\{\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ cuyo supremo es α. Entonces $\alpha \leq \xi^{\alpha} < \xi^{\alpha+1}$.

(*B*) El ordinal β_0 de (A), que es el mínimo con la propiedad $\alpha < \xi^{\beta_0}$, debe ser sucesor de algún ordinal ν_0, es decir, $\beta_0 = \nu_0 + 1$.
$\beta_0 \neq 0$ ya que $\xi^0 = 1 \leq \alpha$. Tampoco puede ser ordinal límite, ya que si lo fuera, por la minimalidad de β_0 se tendría que $\xi^{\delta} \leq \alpha$ para todo $\delta < \beta_0$ y por lo tanto $\xi^{\beta_0} \leq \alpha$, lo que es una contradicción.

Probemos ahora el teorema.

Como $\alpha < \xi^{\beta_0} = \xi^{\nu_0} \cdot \xi$, por el Teorema 4.2.5, existen ordinales únicos η_0 y α_1 tales que $\alpha = \xi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \alpha_1$ donde $\eta_0 < \xi$ y $\alpha_1 < \xi^{\nu_0}$. Además $\eta_0 > 0$, pues si $\eta_0 = 0$, se tendría $\alpha = \alpha_1 < \xi^{\nu_0} \leq \alpha$, donde la segunda desigualdad es debido a que β_0 es el mínimo tal que $\alpha < \xi^{\beta_0}$ y $\nu_0 < \beta_0$. Así llegaríamos a que $\alpha < \alpha$ que es un absurdo.

Si $\alpha_1 = 0$ aquí terminamos y en este caso $r = 0$ y $0 < \eta_0 < \xi$.

Si $\alpha_1 > 0$, repetimos el proceso anterior, es decir, tomamos el mínimo ordinal β_1 tal que $\alpha_1 < \xi^{\beta_1}$ y como antes, se tiene que $\beta_1 = \nu_1 + 1$ para algún ordinal ν_1. Claramente $\nu_0 > \nu_1$ y $\xi^{\nu_1} \leq \alpha_1 < \xi^{\nu_1+1} = \xi^{\nu_1} \cdot \xi$. Volviendo a aplicar el Teorema 4.2.5, existen η_1 y α_2 tales que $\alpha_1 = \xi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \alpha_2$ donde $0 < \eta_1 < \xi$ y $\alpha_2 < \xi^{\eta_1}$. Entonces $\alpha = \xi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \xi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \alpha_2$, donde $\nu_0 > \nu_1$ y $0 < \eta_0, \eta_1 < \xi$.
Mientras tengamos $\alpha_i \neq 0$, repetimos este proceso. Así pues tenemos una representación de α

$$\alpha = \xi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \xi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \ldots + \xi^{\nu_i} \cdot \eta_i + \alpha_{i+1},$$

donde $\nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_i \geq 0$ y para $j = 0, ..., i$, $0 < \eta_j < \xi$.

Afirmamos que para alguna j finita, $\alpha_{j+1} = 0$.

Fácilmente se ve que $\alpha = \alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots$, así que considerando el conjunto de las α_i que son distintas de cero llegamos a la conclusión de que este conjunto debe ser finito (la prueba de ello se deja al lector y corresponde al ejercicio 4.10). Por lo tanto si el mínimo distinto de cero es α_r, donde r es finito, entonces $\alpha_{r+1} = 0$ y

$$\alpha = \xi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \xi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \ldots + \xi^{\nu_r} \cdot \eta_r$$

donde $\nu_0 > \nu_1 > ... > \nu_r \geq 0$ y $0 < \eta_i < \xi$ para $i = 0, \ldots, r$.

Unicidad. Supongamos que también se tiene que $\alpha = \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 + \xi^{\mu_1} \cdot \rho_1 + \ldots + \xi^{\mu_m} \cdot \rho_m$ donde m es finito,

$$\mu_0 > \mu_1 > \ldots > \mu_m \geq 0$$

y $0 < \rho_i < \xi$ para $i = 0, ..., m$.

Primero demostraremos por inducción finita sobre m que $\alpha < \xi^{\mu_0+1}$
1) Si $m = 0$, entonces $\alpha = \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 < \xi^{\mu_0} \cdot \xi = \xi^{\mu_0+1}$.
2) Supongamos cierto el resultado para $m - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 + (\xi^{\mu_1} \cdot \rho_1 + \ldots + \xi^{\mu_m} \cdot \rho_m) \\ &< \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 + \xi^{\mu_1+1} \leq \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 + \xi^{\mu_0} \\ &= \xi^{\mu_0} \cdot (\rho_0 + 1) \\ &\leq \xi^{\mu_0} \cdot \xi = \xi^{\mu_0+1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha < \xi^{\mu_0+1}$.

Usando el hecho de que

$$\xi^{\mu_0+1} > \alpha \geq \xi^{\mu_0} \cdot \rho_0 \geq \xi^{\mu_0}$$

y por la manera en que se eligió ν_0, es decir, mínimo con la propiedad $\xi^{\nu_0+1} > \alpha$, debe ser $\nu_0 = \mu_0$, así que

$$\alpha = \xi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \delta_1 = \xi^{\nu_0} \cdot \rho_0 + \delta_2$$

donde $\delta_1 = \xi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \cdots + \xi^{\nu_r} \cdot \eta_r$, $\delta_2 = \xi^{\mu_1} \cdot \rho_1 + \cdots + \xi^{\mu_m} \cdot \rho_m$ y además $\delta_1 < \xi^{\nu_1+1} \leq \xi^{\nu_0}$, $\delta_2 < \xi^{\mu_1+1} \leq \xi^{\mu_0} = \xi^{\nu_0}$ y $\eta_0, \rho_0 < \xi$.

Aplicando la unicidad de la representación en el Teorema 4.2.5, obtenemos $\delta_1 = \delta_2$ y $\eta_0 = \rho_0$. Repitiendo el proceso se obtiene el resultado, es decir, $r = m$, $\eta_i = \rho_i$ y $\nu_i = \mu_i$ para $i = 0, \ldots, m$. ■

***Corolario* 4.2.13.** *Cada número ordinal $\alpha > 0$ admite una representación*

$$\alpha = 2^{\nu_0} + 2^{\nu_1} + \cdots + 2^{\nu_r},$$

donde $\nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_r \geq 0$.

Demostración. En el Teorema 4.2.12 tomamos $\xi = 2$ y por lo tanto $\eta_i = 1$ para $i = 0, \ldots, r$. ■

***Corolario* 4.2.14.** *Cada número ordinal $\alpha > 0$ admite una representación*

$$\alpha = \varpi^{\nu_0} \cdot \eta_0 + \varpi^{\nu_1} \cdot \eta_1 + \ldots + \varpi^{\nu_r} \cdot \eta_r$$

donde r es finito, $\nu_0 > \nu_1 > \ldots > \nu_r \geq 0$ y $\eta_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, r$. Además $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r$ son finitos si y sólo si $\alpha < \varpi^{\varpi}$.

Demostración. Si ν_0 es finito, entonces $\alpha < \varpi^{\nu_0+1} < \varpi^{\varpi}$. Inversamente, si $\alpha < \varpi^{\varpi}$, entonces para el mínimo ordinal $\zeta (= \nu_0 + 1)$ tal que $\alpha < \varpi^{\zeta}$ se tiene que $\zeta \leq \varpi$. Pero como ya hemos visto que no puede ser un ordinal límite, entonces ζ debe ser finito y por lo tanto $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r$ también lo son. ■

Nota 22. En la representación del Teorema 4.2.12, ν_0 no tiene que ser necesariamente estrictamente menor que α, por ejemplo $\varpi = 2^{\varpi}$. Sin embargo sí podemos afirmar que ν_0 no puede ser mayor que α pues como $\alpha < \alpha + 1$ y $\nu_0 + 1$ es el mínimo con esta propiedad, entonces $\nu_0 \leq \alpha$.

§ 4.3 Representantes para números ordinales según von Neumann

Cuando se trabaja con clases, siempre es conveniente encontrar representantes para estas clases que sean lo más simple posible. von Neumann concibió el número ordinal α como el conjunto de todos los ordinales menores que α. El caso aquí es que ya conocemos los números ordinales, así que para cada número ordinal α, daremos un conjunto denotado por $rep(\alpha)$ que represente a α. Definiremos por recursión transfinita esta "función" $rep(\ )$, es decir, construiremos una función

rep( ): clase de todos los ordinales $\longrightarrow$ clase de todos los conjuntos

Antes de definir esta "función" $rep(\ )$, construiremos una correspondencia entre números ordinales y conjuntos que, aunque no sea una función formalmente hablando pues ni el dominio ni el codominio son conjuntos, su comportamiento es como el de función y se puede decir esto mismo sobre la correspondencia que existe cuando se aplica el Teorema de Recursión Transfinita. Si denotamos por $\mathscr{O}$ la clase de todos los ordinales y por $\mathscr{C}$ la clase de todos los conjuntos, sea G la función que a cada aplicación $f : W(\alpha) \longrightarrow \mathscr{C}$, le hace corresponder el conjunto

$$G(f) = \{f(\beta) \mid \beta \in W(\alpha)\} \ (= Im(f)).$$

Por el Teorema de Recursión Transfinita, existe una función única $\varphi : \mathscr{O} \longrightarrow \mathscr{C}$ tal que $\varphi(\alpha) = G(\varphi | W(\alpha))$. Esto es

$$\varphi(\alpha) = rep(\alpha) = \{rep(\beta) \mid \beta < \alpha\}.$$

Ejemplo 4.3.1.
(1) $rep(0) = \varnothing$.

(2) $rep(1) = \{\varnothing\}$
(3) $rep(2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
(4) $rep(3) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$.

Veamos que esta representación es efectivamente biyectiva y además veremos cómo podemos recuperar el número ordinal α a partir del conjunto $rep(\alpha)$. Antes de ver esto, demostremos el siguiente lema

***Lema* 4.3.1.** *Para todo número ordinal α, $rep(\alpha) \notin rep(\alpha)$.*

Demostración. Por inducción transfinita sobre α.

Hipótesis de inducción: Para cada $\beta < \alpha$, $rep(\beta) \notin rep(\beta)$.

Si se tuviera que $rep(\alpha) \in rep(\alpha) = \{rep(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ existiría $\beta < \alpha$ tal que $rep(\beta) = rep(\alpha)$ y como $rep(\beta) \in rep(\alpha)$, entonces $rep(\beta) \in rep(\beta)$ lo que contradice la hipótesis de inducción. ■

***Teorema* 4.3.2.**
(1) *$\alpha < \beta$ si y sólo si $rep(\alpha) \subsetneq rep(\beta)$ (y por lo tanto $rep(\ )$ es inyectiva),*
(2) *$\alpha < \beta$ si y sólo si $rep(\alpha) \in rep(\beta)$,*
(3) *$(rep(\alpha), \in)$ es un conjunto bien ordenado y $ord(rep(\alpha), \in) = \alpha$.*

Demostración.
(1) Si $\alpha < \beta$, entonces

$$rep(\alpha) = \{rep(\gamma) \mid \gamma < \alpha\} \subseteq \{rep(\gamma) \mid \gamma < \beta\} = rep(\beta).$$

Claramente no se puede dar la igualdad porque $rep(\alpha) \in rep(\beta)$ y si este último fuera igual a $rep(\alpha)$, entonces se tendría que $rep(\alpha) \in rep(\alpha)$ que por el Lema 4.3.1, no puede ser. Entonces $rep(\alpha) \subsetneq rep(\beta)$.

Ahora supongamos que $rep\,(\alpha) \subsetneq rep\,(\beta)$. Si se tuviera que $\beta \leq \alpha$ tendríamos entonces, por lo que acabamos de demostrar, que $rep\,(\beta) \subseteq rep\,(\alpha) \subsetneq rep\,(\beta)$, es decir, $rep(\beta) \subsetneq rep(\beta)$ que es imposible. Entonces debe ser $\alpha < \beta$.

(2) Si $\alpha < \beta$, es inmediato que $rep(\alpha) \in rep(\beta)$. Inversamente, supongamos que $rep(\alpha) \in rep(\beta) = \{rep(\gamma) \mid \gamma < \beta\}$. Entonces existe un ordinal $\gamma < \beta$ tal que $rep(\alpha) = rep(\gamma)$, lo que implica por (1) que $\gamma = \alpha$, y así $\alpha < \beta$.

(3) Hemos demostrado en (1) que la función $rep(\ )$ es inyectiva, y por (2), se tiene entonces que $(rep(\alpha), \in)$ es isomorfo a $(\{\beta \mid \beta < \alpha\}, <) = (W(\alpha), <)$. Pero el conjunto bien ordenado $(W(\alpha), <)$ es representante de α (Teorema 4.1.18). Por lo tanto $ord(rep(\alpha), \in) = ord(W(\alpha), <) = \alpha$. ■

***Corolario* 4.3.3.** *$(rep(\alpha), \in)$ es un conjunto bien ordenado.*

Veamos ahora, cómo se simplifican muchos conceptos sobre números ordinales, usando la representación de von Neumann

***Teorema* 4.3.4.**
(1) $rep(\alpha + 1) = rep(\alpha) \cup \{rep(\alpha)\}$,
(2) *α es ordinal límite o cero si y sólo si* $rep(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} rep(\beta)$,
(3) *α es finito si y sólo si $(rep(\alpha), \in)$ es doblemente bien ordenado.*

Demostración.

$$\begin{aligned}(1)\quad rep(\alpha+1) &= \{rep(\beta) \mid \beta < \alpha + 1\} \\ &= \{rep(\beta) \mid \beta \leq \alpha\} \\ &= \{rep(\beta) \mid \beta < \alpha\} \cup \{rep(\alpha)\} \\ &= rep(\alpha) \cup \{rep(\alpha)\}.\end{aligned}$$

(2) Para cualquier número ordinal α, siempre es verdadera

$$\bigcup_{\beta<\alpha} rep(\beta) \subseteq rep(\alpha),$$

sea α ordinal límite o no.

Sin embargo, en el caso en que α es ordinal límite, se tiene que $\beta < \alpha$ implica $\beta + 1 < \alpha$. Entonces $rep(\beta) \in rep(\beta + 1) \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} rep(\gamma)$. Así que $rep(\beta) \in rep(\alpha)$ implica $rep(\beta) \in \bigcup_{\gamma<\alpha} rep(\gamma)$. Por lo tanto

$$rep(\alpha) \subseteq \bigcup_{\gamma<\alpha} rep(\gamma) \subseteq rep(\alpha)$$

y de aquí se tiene la igualdad.

Inversamente, si $rep(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} rep(\beta)$, α no puede ser sucesor, ya que si $\alpha = \delta + 1$ para algún ordinal δ, teniendo en cuenta que $\bigcup_{\gamma<\delta} rep(\gamma) \subseteq rep(\delta)$

$$\begin{aligned}rep(\alpha) &= \bigcup_{\gamma<\alpha=\delta+1} rep(\gamma) \\ &= \bigcup_{\gamma\leq\delta} rep(\gamma) \\ &= \left(\bigcup_{\gamma<\delta} rep(\gamma)\right) \bigcup rep(\delta) \\ &= rep(\delta) \neq rep(\alpha),\end{aligned}$$

donde la última igualdad se da porque $\bigcup_{\gamma<\delta} rep(\gamma) \subseteq rep(\delta)$. Esto es, si α es sucesor, la unión de los representantes anteriores es el representante de $\alpha - 1$. Por lo tanto α debe ser ordinal límite o cero.

(3) α es finito si y sólo si $W(\alpha)$ es finito y $W(\alpha)$ es finito si y sólo si $(W(\alpha), <)$ es doblemente bien ordenado, pero como

$$(W(\alpha), <) \cong (rep(\alpha), \in),$$

visto en la demostración del inciso (3) del Teorema 4.3.2, entonces $(rep(\alpha), \in)$ es doblemente bien ordenado. ■

Lo que hemos hecho hasta ahora es que, a cada número ordinal α, le hemos asociado un conjunto que denotamos $rep(\alpha)$. Si para estos conjuntos no hubiéramos usado el concepto de ordinal, ellos servirían para desarrollar una teoría de los números ordinales. Sin embargo, daremos una caracterización de estos conjuntos donde no intervenga el concepto de número ordinal y entonces estos conjuntos podrían servir para definir a los números ordinales. Esta caracterización es la siguiente:

***Teorema* 4.3.5.** *Un conjunto $\mathcal{C}$ es un conjunto representante para un número ordinal si y sólo si satisface*
(1) *$\mathcal{C}$ es un conjunto transitivo, esto es, si $x \in y$ y $y \in \mathcal{C}$, entonces $x \in \mathcal{C}$.*
(2) *$(\mathcal{C}, \in)$ es un conjunto bien ordenado.*

Demostración.
⇒) Sea $\mathcal{C}$ un conjunto tal que $\mathcal{C} = rep(\alpha)$ para algún número ordinal α. Debemos demostrar que $\mathcal{C}$ satisface las propiedades (1) y (2).

(1) Si $rep(\beta) \in rep(\gamma)$ y $rep(\gamma) \in \mathcal{C} = rep(\alpha)$, entonces, por (2) del Teorema 4.3.2, se tiene que $\beta < \gamma < \alpha$. Por lo tanto $\beta < \alpha$ y así $rep(\beta) \in rep(\alpha) = \mathcal{C}$.

(2) Es el Corolario 4.3.3.

⇐)Inversamente, sea $\mathcal{C}$ un conjunto que satisface (1) y (2). Por (2), $(\mathcal{C}, \in)$ es un conjunto bien ordenado. Sea $\alpha = ord(\mathcal{C}, \in)$, demostraremos por inducción transfinita que $\mathcal{C} = rep(\alpha)$.

Hipótesis de inducción: Supongamos que la afirmación es verdadera para todos los conjuntos $\mathcal{D}$ con las propiedades (1) y (2) tales que si $ord(\mathcal{D}, \in) = \beta < \alpha$, entonces $\mathcal{D} = rep(\beta)$. Por demostrar que $\mathcal{C} = rep(\alpha)$, donde $\alpha = ord(\mathcal{C}, \in)$.

Afirmamos que cada $c \in \mathcal{C}$ es un conjunto que satisface también las condiciones (1) y (2) con $ord(c, \in) < \alpha$.

Veamos que c es transitivo

Supongamos que $c_1 \in c_2$ y que $c_2 \in c$. Como $c \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es transitivo, entonces $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, y como $\in$ es un orden, entonces $c_1 \in c$. Por lo tanto c es transitivo. Para ver que $(c, \in)$ es bien ordenado basta demostrar que $c = \mathcal{C}_c$, es decir, c es el segmento inicial de $\mathcal{C}$ determinado por c,

$$\mathcal{C}_c = \{d \in \mathcal{C} \mid d < c\} = \{d \mid d \in c\} = c.$$

Entonces $(c, \in) = (\mathcal{C}_c, \in)$ es bien ordenado por ser un subconjunto del conjunto bien ordenado $(\mathcal{C}, \in)$ y por ser segmento inicial, se tiene $\gamma = ord(c, \in) = ord(\mathcal{C}_c, \in) < ord(\mathcal{C}, \in) = \alpha$ y como $c = \mathcal{C}_c$ satisface (1) y (2), por hipótesis de inducción $\mathcal{C}_c = rep(\gamma)$. Esto nos indica que $\mathcal{C} \subseteq \{rep(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$. Por otro lado cada $\gamma < \alpha$ determina un segmento $\mathcal{C}_c$ en $(\mathcal{C}, \in)$ con $ord(\mathcal{C}_c, \in) = \gamma$, es decir, $ord(c, \in) = \gamma$ y esto es $c = rep(\gamma)$, por lo que $rep(\gamma) \in \mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{C} = \{rep(\gamma) \mid \gamma < \alpha\} = rep(\alpha)$. ■

Con esta caracterización de los conjuntos representantes se puede desarrollar una teoría de números ordinales en función de estos representantes. En esta teoría un número ordinal *en el sentido de von Neumann* (*s.v.N.*) se define como un conjunto que satisface las propiedades (1) y (2) del Teorema 4.3.5 y a partir de aquí se desarrolla la teoría de ordinales en la que se demuestra que cada conjunto bien ordenado es isomorfo a un único número ordinal en el sentido de von Neumann.

En particular, cada conjunto (que sabemos que puede bien ordenarse por el axioma de Elección) es equipotente a un número ordinal *s.v.N.*, luego por el buen orden de los números ordinales, para cada conjunto A, existe un mínimo número ordinal *s.v.N* equipotente a A. A este número se le llama la **cardinalidad de** $\boldsymbol{A}$, *s.v.N.* Si denotamos por $card_{v.N}A$ a esta cardinalidad, entonces

$$A_1 \text{ es equipotente a } A_2 \text{ si y sólo si } card_{v.N.}A_1 = card_{v.N.}A_2.$$

Sin embargo debemos tener cuidado al identificar cardinales con ciertos números ordinales y números ordinales con ciertos conjuntos con respecto a las operaciones aritméticas debido a que la suma ordinal de números ordinales iniciales, en general no es un número ordinal inicial y en particular no es el número ordinal de la suma cardinal correspondiente.

Por ejemplo $\omega_1 + \omega \neq \omega_1$ y $card\omega_1 + card\omega = \aleph_1 + \aleph_0 = \aleph_1$, $ord(card\omega_1 + card\omega) = ord(\aleph_1) = \omega_1$.

Análogamente la potencia ordinaria de dos números ordinales no tiene como representante, en el sentido de von Neumann la potencia conjuntista de los respectivos representantes (*s.v.N.*). Por ejemplo

$$rep(1)^1 = rep(1) = \{\varnothing\},$$

mientras que

$$\begin{aligned} rep(1)^{rep(1)} &= \{f \mid f : rep(1) \to rep(1)\} \\ &= \{f \mid f : \{\varnothing\} \to \{\varnothing\}\} \\ &= \{\{(\varnothing, \varnothing)\}\} \subseteq \mathscr{P}(\{\varnothing\} \times \{\varnothing\}) \end{aligned}$$

En cuanto a la aritmética de los números naturales, puede desarrollarse en esta teoría definiendo un número ordinal *s.v.N.* $\mathcal{C}$ tal que $(\mathcal{C}, \in)$ es doblemente bien ordenado.

Para desarrollar esta teoría, particularmente para la aritmética de los números naturales, la condición (2) del Teorema 4.3.5, puede expresarse de otra manera, evitando así el concepto de buen orden, teniendo en cuenta el siguiente lema

***Lema* 4.3.6.** *Sea $\mathcal{C}$ un conjunto. Son equivalentes*
(1) $(\mathcal{C}, \in)$ *es un conjunto bien ordenado.*
(2) $(\mathcal{C}, \in)$ *satisface*

a) Para cada $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$, $c_1 \neq c_2$ si y sólo si $c_1 \in c_2$ o $c_2 \in c_1$,

b)Para cada $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, $\mathcal{D} \neq \varnothing$ implica que existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

Demostración.
(1) ⇒ (2) Sea $(\mathcal{C}, \in)$ bien ordenado. Entonces (a) se satisface obviamente. Para demostrar (b), sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{D} \neq \varnothing$.

Sea d_0 el mínimo de $\mathcal{D}$ respecto al orden $\in$. Evidentemente ningún elemento de $\mathcal{D}$ puede ser elemento de d_0, esto es, $d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

(2) ⇒ (1) Primero veremos que $\in$ es un orden total.

$1°/$ Por (a) cualesquiera dos elementos distintos son comparables.

$2°/$ $c \notin c \quad \forall\, c \in \mathcal{C}$.

Supongamos que $c \in c$ y sea $\mathcal{D} = \{c\}$. Como $\mathcal{D} \neq \varnothing$, por (b) existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$. Pero $d_0 = c$ y como por hipótesis $c \in \mathcal{C}$, entonces $c \in c \cap \{c\} = d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$ lo que es un absurdo. Entonces $c \notin c$ $\forall\, c \in \mathcal{C}$.

$3°/$ $\in$ es transitiva sobre $\mathcal{C}$.

Sean $c_1, c_2, c_3 \in \mathcal{C}$ tales que $c_1 \in c_2$ y $c_2 \in c_3$. Debemos demostrar que $c_1 \in c_3$. Sea $\mathcal{D} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Por (b) existe $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$.

Como $c_1 \in c_2 \cap \mathcal{D}$ y $c_2 \in c_3 \cap \mathcal{D}$, entonces la única posibilidad para d_0 es que $d_0 = c_1$. $c_1 \neq c_3$ (ya que si $c_1 = c_3$ se tendría que $c_2 \in c_3 \cap \mathcal{D} = c_1 \cap \mathcal{D} = d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$ que es un absurdo) y $c_3 \notin c_1$ (ya que si $c_3 \in c_1$, entonces se tendría que $c_3 \in c_1 \cap \mathcal{D} = d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$ que es un absurdo). Por lo tanto, por (a), $c_1 \in c_3$.

Por último veamos que $\in$ es un buen orden.

Sea $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ y $\mathcal{D} \neq \varnothing$. Por (b) sea $d_0 \in \mathcal{D}$ tal que $d_0 \cap \mathcal{D} = \varnothing$. Esto significa que para todo $d \in \mathcal{D}$ con $d \neq d_0$ se tiene, por la comparabilidad, que $d_0 \in d$. Como esto es para todo $d \in \mathcal{D}$ con $d \neq d_0$, entonces d_0 debe ser el mínimo de $\mathcal{D}$, lo que muestra que $\in$ es un buen orden. ■

Para finalizar, presentamos a continuación un muy breve desarrollo de la teoría de números ordinales utilizando el concepto de número ordinal en el sentido de von Neumann.

La demostración de los siguientes dos lemas se puede ver en la demostración del Teorema 4.3.5.

***Lema* 4.3.7.** *Cada elemento de un número ordinal, s.v.N., es un número ordinal s.v.N..*

***Lema* 4.3.8.** *Para un número ordinal s.v.N. $\mathcal{C}$, cada $c \in \mathcal{C}$ es igual a un segmento inicial de $(\mathcal{C}, \in)$.*

Demostración. Véase que $\mathcal{C}_c = \{x \in \mathcal{C} \mid x \in c\} = c$. ■

***Lema* 4.3.9.** *Para dos números ordinales s.v.N. $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$, si $(\mathcal{C}, \in)$ es isomorfo a $(\mathcal{C}', \in)$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.*

Demostración. Sea $\varphi : (\mathcal{C}, \in) \longrightarrow (\mathcal{C}', \in)$ un isomorfismo. Demostraremos que $\varphi(c) = c$ para todo $c \in \mathcal{C}$ y entonces se tendrá que $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

Supongamos que $\mathscr{U} = \{c \in \mathcal{C} \mid \varphi(c) \neq c\} \neq \varnothing$ y sea $c_0 \in \mathcal{C}$ el mínimo de $\mathscr{U}$. Entonces para todo $d \in \mathcal{C}_{c_0}$ (el segmento inicial determinado por c_0) se tiene que $\varphi(d) = d$, por lo que $\mathcal{C}_{c_0} = \varphi(\mathcal{C}_{c_0}) = \mathcal{C}'_{\varphi(c_0)}$. Por el Lema 4.3.8, $\mathcal{C}_{c_0} = c_0$ y $\mathcal{C}'_{\varphi(c_0)} = \varphi(c_0)$. Por lo tanto $\varphi(c_0) = c_0$, lo que contradice la elección de c_0. Por lo tanto $\mathscr{U} = \varnothing$ y así $\varphi(c) = c$ para todo $c \in \mathcal{C}$, lo que significa que $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$. ■

***Teorema* 4.3.10.** *La relación $\mathcal{C}_1 < \mathcal{C}_2$ si y sólo si $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}_2$ para números ordinales s.v.N es una relación de orden total.*

Demostración.
(*i*) Para un número ordinal *s.v.N.* $\mathcal{C}$ no se puede dar $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ ya que si así fuera, un elemento de $\mathcal{C}$ (que es $\mathcal{C}$ mismo) estaría relacionado (con respecto a $\in$) consigo mismo lo que no puede ser ya que $\in$ es un orden total. Por lo tanto $\mathcal{C} \notin \mathcal{C}$.

(*ii*) Si $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son números ordinales tales que $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_2 \in \mathcal{C}_3$, entonces debido a que $\mathcal{C}_3$ es transitivo, se tiene que $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}_3$.

(*iii*) Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ números ordinales *s.v.N* tales que $\mathcal{C}_1 \neq \mathcal{C}_2$ y consideramos los conjuntos bien ordenados $(\mathcal{C}_1, \in)$ y $(\mathcal{C}_2, \in)$. $(\mathcal{C}_1, \in)$ y $(\mathcal{C}_2, \in)$ no pueden ser isomorfos ya que si lo fueran por el Lema 4.3.9, se tendría que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$ que por hipótesis no es así. Por el Teorema 4.1.14 se tiene que $(\mathcal{C}_1, \in)$ es isomorfo un segmento inicial de $(\mathcal{C}_2, \in)$ o al revés. Supongamos que $(\mathcal{C}_1, \in)$ es isomorfo a un segmento inicial de $(\mathcal{C}_2, \in)$, esto es, es un elemento $d \in \mathcal{C}_2$ (Lema 4.3.8). Pero por el Lema 4.3.7, d es un número ordinal *s.v.N.*, por lo que $\mathcal{C}_1 = d$ y así $\mathcal{C}_1 \in \mathcal{C}_2$. ■

***Corolario* 4.3.11.** *Para cada número ordinal s.v.N.* $\mathcal{C}$ *se tiene que*

$$\mathcal{C} = \{c \mid c \text{ es un número ordinal s.v.N.} < \mathcal{C}\}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{c \mid c \in \mathcal{C}\} \\ &= \{c \mid c \text{ es un número ordinal } s.v.N \text{ y } c \in \mathcal{C}\} \\ &= \{c \mid c \text{ es un número ordinal } s.v.N. \text{ y } c < \mathcal{C}\}. \end{aligned}$$

La segunda igualdad es por el Lema 4.3.7 y la tercera por el Teorema 4.3.10. ■

La demostración del siguiente teorema es un ejercicio más que se deja al lector.

***Teorema* 4.3.12.** *Cada conjunto de números ordinales s.v.N es bien ordenado respecto al orden* $<$.

***Teorema* 4.3.13.** *Para cada conjunto bien ordenado* $(\Delta, <)$ *existe un único número ordinal s.v.N.* $\mathcal{C}$ *tal que* $(\Delta, <)$ *es isomorfo a* $(\mathcal{C}, \in)$.

Demostración. Sea $(\Delta, <)$ un conjunto bien ordenado y consideremos el conjunto bien ordenado $(\overline{\Delta}, <)$ que resulta de Δ al agregar un elemento $\overline{a}$ tal que $a < \overline{a}\ \forall\ a \in \Delta$.

Definimos sobre $\overline{\Delta}$, por inducción transfinita, una función φ que a cada $a \in \overline{\Delta}$ le hace corresponder un conjunto $\varphi(a)$ tal que

$$\varphi(a) = \{\varphi(x) \mid x \in \overline{\Delta},\ x < a\}.$$

Afirmamos que $\varphi(\overline{a})$ es un número ordinal *s.v.N.* y que

$$\varphi : \Delta \longrightarrow \varphi(\overline{a}) = \{\varphi(a) \mid a \in \Delta\}$$

es un isomorfismo de $(\Delta, <)$ en $(\varphi(\overline{a}), \in)$.

$1^\circ/$ $\varphi(\overline{a})$ es un número ordinal *s.v.N*

$\varphi(\overline{a})$ es transitivo ya que si $x \in y \in \varphi(\overline{a})$, entonces $x = \varphi(a_1)$, y $y = \varphi(a_2)$ y $a_1 < a_2 < \overline{a}$, por lo que $x = \varphi(a_1) \in \varphi(\overline{a})$.

$2^\circ/$ Basta ahora verificar que $\varphi : \Delta \longrightarrow \varphi(\overline{a})$ es un isomorfismo de $(\Delta, <)$ en $(\varphi(\overline{a}), \in)$.

Se tiene que $\varphi(x) \notin \varphi(x)$ para toda $x \in \Delta$. Su demostración la dejamos como ejercicio.

φ preserva orden; si $a_1 < a_2$ en Δ, entonces $\varphi(a_1) \in \varphi(a_2)$. En particular se tiene que $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ ya que $\varphi(a_1) \notin \varphi(a_1)$ y por lo tanto φ es inyectiva. Además, si $a_1 \not< a_2$, entonces $a_2 \leq a_1$, y así $\varphi(a_2) \subseteq \varphi(a_1)$, lo que significa que $\varphi(a_1) \notin \varphi(a_2)$ ya que si así lo fuera, por la transitividad resultaría que $\varphi(a_1) \in \varphi(a_1)$ que ya hemos visto no puede suceder. Por último φ es claramente suprayectiva y por lo tanto φ es un isomorfismo, por lo que $(\varphi(\overline{a}), \in)$ es bien ordenado y así entonces $(\varphi(\overline{a}), \in)$ es un número ordinal *s.v.N.* isomorfo a $(\Delta, <)$. ■

§ 4.5 Ejercicios

4.1. Demuestra que la relación de isomorfismo entre conjuntos bien ordenados es reflexiva, simétrica y transitiva.

4.2. Demuestra que si $f : (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados, entonces $f^{-1} : (B, <_B) \longrightarrow (A, <_A)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados.

4.3. Demuestra que si $f, g : (A, <_A) \longrightarrow (B, <_B)$ son isomorfismos de conjuntos bien ordenados, entonces $g^{-1} \circ f : (B, <_B) \longrightarrow (A, <_A)$ es un isomorfismo de conjuntos bien ordenados.

4.4. Demostrar que el supremo del conjunto X del Teorema 4.1.26 es $\delta = (\bigcup_{\gamma \in X} W(\gamma), <)$.

4.5. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en la cual cada subconjunto numerable está bien ordenado. Probar que $\mathcal{C}$ está bien ordenado.

4.6. Sea $(X, \leq)$ una cadena y sean A y B subconjuntos de X tales que $X = A \cup B$ y $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ son bien ordenados. Probar que $(X, \leq)$ es bien ordenado.

4.7. Probar que cualquier cadena tiene un subconjunto **cofinal** (Un subconjunto A de un conjunto parcialmente ordenado X se llama cofinal en X si para todo $x \in X$ existe $a \in A$ tal que $x \leq a$) y bien ordenado.

4.8. Demostrar que si α y β son ordinales tales que $\alpha \geq 0$ y $\beta > 0$, entonces $\alpha + \beta > 0$.

4.9. Demostrar que si α y β son ordinales tales que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, entonces $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

4.10. Demostrar que no puede existir una sucesión monótona decreciente infinita de números ordinales.

4.11. Sean $(A, <_A)$ y $(B, <_B)$ conjuntos bien ordenados y consideremos $\alpha = ord(A, <_A)$, $\beta = ord(B, <_B)$. Definimos el producto de α y β como

$$\alpha \circ \beta = ord(A \times B, <_{A \times B})$$

donde $<_{A \times B}$, llamado el **orden antilexicográfico** , se define como

$$(a, b) <_{A \times B} (a', b') \text{ si } b <_B b' \text{ o } (b = b' \text{ y } a <_A a')$$

(i) Demostrar que $<_{A\times B}$ es un buen orden en $A \times B$.
(ii) Demostrar que no depende de los representantes A y B.

4.12. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha^{\beta} \neq 0$, para cualquier ordinal β.

4.13. Demostrar que $\alpha < \beta$ si y sólo si $rep\,(\alpha) \in rep\,(\beta)$.

4.14. Demuestre el Lema 4.3.7. *Sugerencia: Véase la demostración del Teorema* 4.3.5.

4.15. Demuestre el Lema 4.3.8. *Sugerencia: Véase la demostración del Teorema* 4.3.5.

4.16. Demuestre el Teorema 4.3.12. *Sugerencia: Véase la demostración del Teorema* 4.3.2*; y note que* $W(\gamma) = \gamma$.

Bibliografía

[Ad] Adamson, I, *A set theory workbook*, Birkhauser, Boston, 1998.

[Am] Amor, J.A, *Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias*, Facultad de Ciencias, UNAM, Segunda edición 2005.

[Ba] Bartle, R, *The elements of integration*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1966.

[En] Enderton, H.B, *Elements of Set Theory*, Academic Press, New York, 1977.

[Fr 1] Fraenkel, A, *Abstract set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1953.

[Fr 2] Fraenkel, A, *Foundations of set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Ga] García-Máynez, A, *Topología General*, Porrúa, México, 1988.

[Ha] Halmos, P, *Naive set theory*, Springer, New York, 1974.

[Hö] C. S. Hönig, *Proof of the well-ordering of cardinal numbers*, Proceedings of American Mathematical Society. 5, No 2 (1954), 312.

[He] Hernandez, F, *Teoría de Conjuntos, una introducción*, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Segunda edición 2003.

[Hr] K. Hrbacek y T. Jech, *Introduction to Set Theory*, Marcel Dekker Inc., 1984.

[Je] Jech, T, *The axiom of choice*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[Ka] Kaplansky, I, *Set theory and metric spaces*, Chelsea, New York, 1977

[Ku] Kuratowski, K, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam ; New York, 1976.

[Th] Thomas, T, *Sets Theory*, Springer Verlag, Berlin, 2003.

[Zu] Zuckerman, M, *Sets and transfinite numbers*, Macmillan, New York, 1974.

Índice alfabético

buen orden, 19

cadena, 19
cardinal
  finito, 54
  infinito, 54
  límite, 65
  número, 38
clase
  de equivalencia, 13
  representante de una, 14
codominio de una función, 9
cofinal, 123
comparables (elementos), 17
composición
  de funciones, 11
  de relaciones, 8
conjunto
  f-invariante, 26
  cardinalidad de un, 118
  bien ordenado, 19
  cociente, 16
  convexo, 28
  finito, 50
  indicado, 12
  inescindible, 26
  infinito, 51
  numerable, 58
  parcialmente ordenado, 16
  potencia, 6
  saturado, 26
  totalmente
    ordenado, 19
  universal (no existencia), 5
  vacío, 1
conjuntos
  ajenos, 3
  ajenos dos a dos, 3
  del mismo tipo de orden, 88
  equipotentes, 37
  semejantes, 88
contradominio de una función, 9
cota
  inferior, 19
  superior, 19

diferencia
  de conjuntos, 3
  simétrica, 21
dirección, 22
doble buen orden, 52
dominio
  de una función, 9
  de una relación, 7

elemento distinguido, 67

familia
  de conjuntos, 3
  indicada, 12
filtro, 22
función, 9
  de selección, 29
  biyectiva, 11
  canónica, 16
  constante, 10

identidad, 10
inclusión, 11
inyectiva, 11
proyección, 10
que preserva el orden, 87
restricción de una, 11
sucesor, 72
suprayectiva, 11
vacía, 10

Hipótesis
Generalizada del Continuo, 66

imagen
de un subconjunto bajo una función, 11
de un subconjunto bajo una relación, 9
de una función, 9
de una relación, 7
directa
de una función, 11
de una relación, 9
inversa
de una función, 11
de una relación, 9
infimo, 19
intersección, 2
de una familia de conjuntos, 4
inversa
de una relación, 7
inverso
derecho de una función, 12
izquierdo de una función, 12
isomorfismo
de conjuntos bien ordenados, 88
de Sistemas de Peano, 71

leyes
de Morgan, 3
distributivas de conjuntos, 3

máximo, 18
mínimo, 18
cardinal infinito, 58
maximal, 18
menor o igual, 17
minimal, 18

número
cardinal, 38
ordinal, 91
no pertenencia, 1

orden
antilexicográfico, 123
parcial, 16
total, 19
ordinal
limite, 95
sucesor, 95

par no ordenado, 2
par ordenado, 6
partición, 14
pertenencia, 1
potencia
de números cardinales, 49
de números ordinales, 107
primer ordinal infinito, 97
Principio de Inducción Transfinita, 86
producto
cartesiano, 6, 29
de cardinales, 46
de ordinales, 102

rango
de una función, 9
relación, 7
de orden
lineal, 19
parcial, 16
sobre cardinales, 38
sobre ordinales, 91
total, 19
de equivalencia, 13
asociada a f, 26
inversa, 7
retícula, 27
completa, 27

saturación de un conjunto, 26
segmento inicial, 27
Sistema de Peano, 67

subconjunto, 2
  propio, 2
sucesor, 66
suma
  de cardinales, 44
  de ordinales, 99
supremo, 19

Teorema
  de Cantor, 43
  de Recursión Transfinita, 86
  de Schröder-Bernstein, 39
torre, 32

unión, 2
  ajena, 43
unitario, 1

Introducción a la teoría intuitiva de conjuntos (cardinales y ordinales)
editado por la Facultad de Ciencias de la
Universidad Nacional Autónoma de México,
se terminó de imprimir el 17 de diciembre de 2011
en los talleres de Navegantes de la Comunicación Gráfica, S.A. de C.V.
Pascual Ortiz Rubio No. 40, San Simón Ticumac,
Delegación Benito Juárez, C.P. 03660. México, D.F.

El tiraje fue de 500 ejemplares.

Está impreso en papel cultural de 90 grs.
En su composición se utilizó tipografía Modern computer
de 12:14, 18:20 puntos de pica.
Tipo de impresión: offset.

El cuidado de la edición estuvo a cargo de
Mercedes Perelló Valls.